Cálculo Estocástico

Mestrado em Matemática Financeira

ISEG

Programa

1. Introdução
2. Conceitos básicos da Teoria da Probabilidade.
3. Movimento Browniano
4. Construção e propriedades do integral estocástico
5. A fórmula de Itô
6. Equações diferenciais estocásticas. Existência e unicidade de soluções. Aproximações numéricas.
7. Relações entre o cálculo estocástico e EDPs.
8. Teorema de Girsanov.
9. Modelos dos mercados financeiros (pricing de derivados).

Bibliografia principal

1. B. Oksendal, Stochastic Differential Equations , Springer, 1998.
2. D. Nualart, Stochastic Calculus (Lecture notes, Kansas University): http://www.math.ku.edu/~nualart/StochasticCalculus.pdf

Bibliografia Secundária

1. Björk, Tomas; Arbitrage Theory in Continuous Time, Oxford University Press, 1998.
2. T. Mikosch, Elementary Stochastic Calculus with Finance in view , World Scientific, 1998.
3. I. Karatzas and S. E. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus , 2nd edition, Springer, 1991.
4. P. E. Kloeden and E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations , Springer, 1992.
5. D. Revuz and M. Yor, Continuous martingales and Brownian motion , Third Edition, Springer, 1999.
6. Onofre Simões, Conceitos Básicos da Teoria da Probabilidade: http://cemapre.iseg.utl.pt/finmath/semin3a6.pdf

Introdução

- O que é o cálculo estocástico?
- É o estudo do cálculo integral (e diferencial) relativamente a processos estocásticos.
- Permite definir integrais de processos estocásticos onde a "função integradora" também é um processo estocástico.
- Processo mais importante e paradigma: movimento Browniano
- Teorias principais: Cálculo de Itô e cálculo de Malliavin

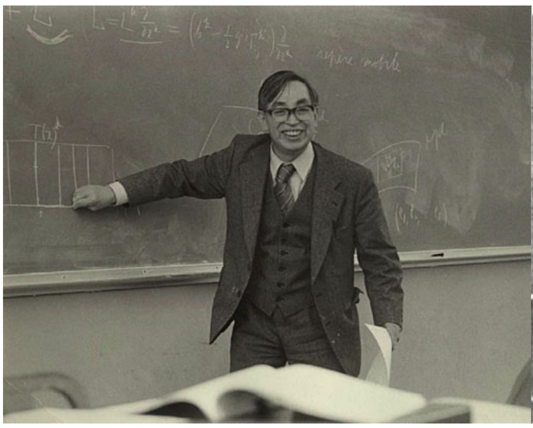
Tópicos Fundamentais

1. Construção de integrais estocásticos
2. Fórmula de Itô
3. Equações diferenciais estocásticas
4. Teorema de Girsanov
5. Relações com as equações diferenciais parciais
6. Desenvolvimento do cálculo estocástico para processos de Lévy, semimartingalas e processos que não são semimartingalas
7. Equações diferenciais parciais estocásticas
8. Aplicações à matemática financeira

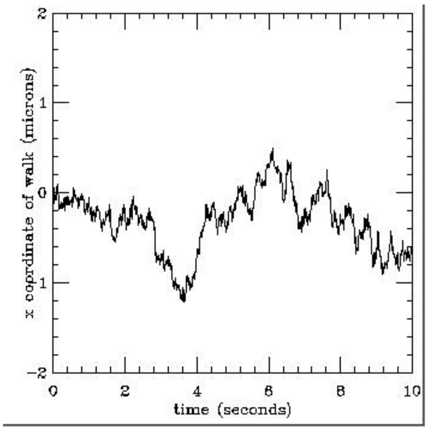
Heróis do cálculo estocástico

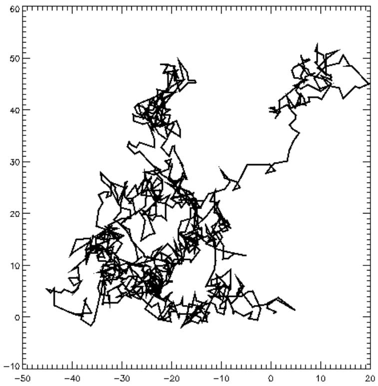
Ver Robert Jarrow and Philip Protter: "A short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance" em http://people.orie.cornell.edu/~protter/WebPapers/historypaper6.pdf

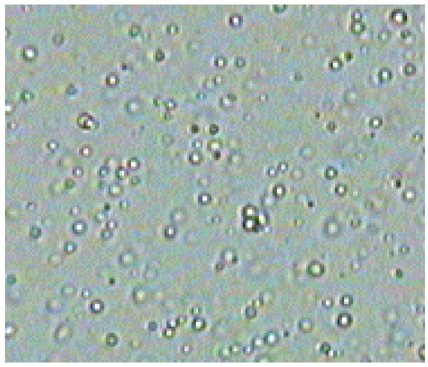
- T. N. Thiele
- Louis Bachelier
- Albert Einstein
- Norbert Wiener
- Kolmogorov
- Vincent Doeblin
- Kiyosi Itô
- Doob
- P. A. Meyer
- Malliavin
- etc...




Movimento Browniano







Processos estocásticos

Definition

Processo estocástico: é uma família de variáveis aleatórias $\{X_t, t \in T\}$ definidas num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. T: conj. onde está definido o parâmetro t Se $T = \mathbb{N}$, o proc. diz-se em tempo discreto, mas se $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ou se $T = \mathbb{R}$, o proc. diz-se em tempo contínuo.

- $\{X_t, t \in T\} = \{X_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in T\}$
- X_t: estado ou posição do processo no instante t.
- O espaço de estados (espaço onde as varáveis aleatórias tomam valores) normalmente é $\mathbb{R}$ (processo com espaço de estados contínuo) ou $\mathbb{N}$ (espaço de estados discretos).
- Para cada ω fixado ($\omega \in \Omega$), a aplicação $t \to X_t(\omega)$ ou $X_\cdot(\omega)$ diz-se uma trajectória do processo

Example

Passeio aleatório: Sucessão de v.a. indep. $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$. Então

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_t = X_{t-1} + Z_t$$

é processo estocástico em tempo discreto.

Example

Um Processo de Markov é um processo em que a probabilidade de obter um estado num momento futuro t depende apenas do estado do processo no último instante observado t_k, i.e., se $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t$, então

$$P\left[a < X_t < b | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k\right] = P\left[a < X_t < b | X_{t_k} = x_k\right].$$

Um processo de Markov com espaço de estados discreto é uma cadeia de Markov. Se for com espaço de estados contínuo e parametro continuo é um processo de difusão

- Caracterização probabilistica de um processo X? .

Definition

Seja $\{X_t, t \in T\}$ um proc. estoc. As distribuições dimensionalmente finitas (ou fidis) de X são todas as distribuições dos vectores

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right),$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots; t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

- Distribuição de processo estocástico $\approx$ fidis.

Example

Processo Gaussiano: quando todas as fidis são Gaussianas. O conhecimento dos parâmetros μ e Σ é suficiente para caracterizar Gaussiana. Logo, para caracterizar um proc. Gaussiano, basta conhecer μ e Σ para todos os vectores do tipo $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)$.

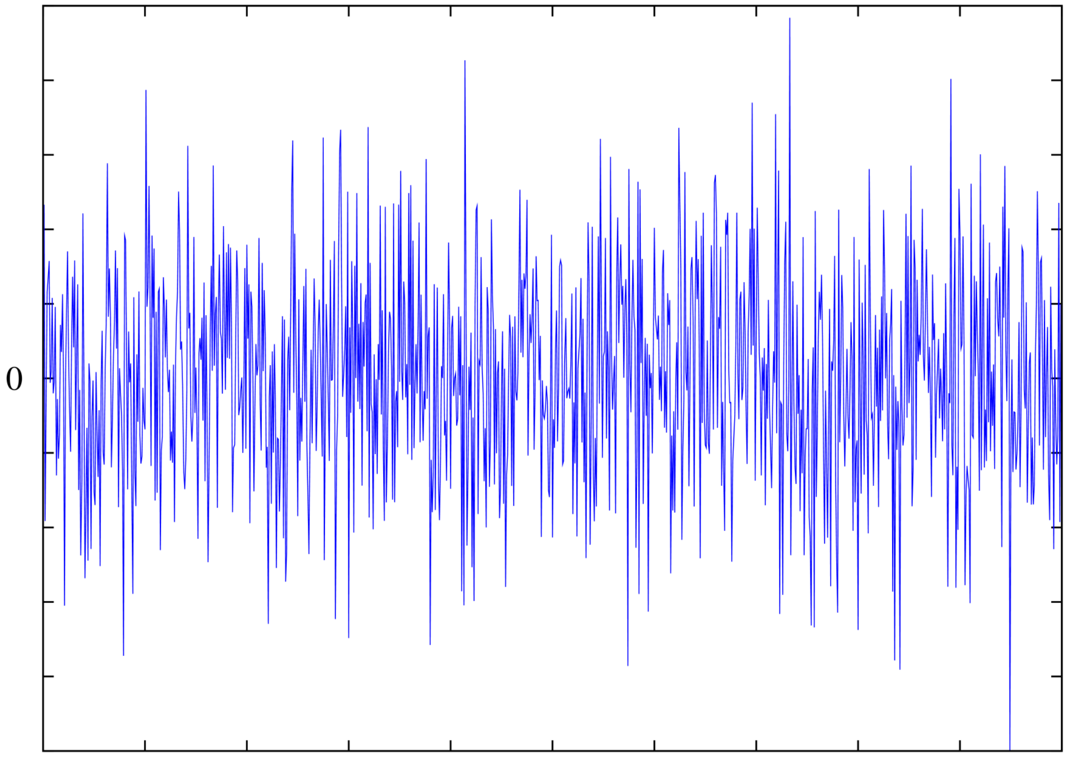
Example

(ruído branco) Seja $\{X_t, t \geq 0\}$ e $X_t \sim N(0, \sigma^2)$, sendo todas as v.a. independentes. Então o processo é Gaussiano e as fidis estão associadas a funções de distribuição

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P\left(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right) \\ &= P(X_{t_1} \leq x_1) P\left(X_{t_2} \leq x_2\right) \ldots P\left(X_{t_n} \leq x_n\right) \\ &= \Phi(x_1)\Phi\left(x_2\right) \ldots \Phi\left(x_n\right). \end{aligned}$$

A função valor esperado e a função de covariância de X são:

$$\mu_X(t) = E[X_t] = 0,$$
$$c_X(s,t) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{se } s = t \\ 0 & \text{se } s \neq t \end{cases}.$$



- Em geral:

$$\mu_X(t) = E[X_t],$$
$$c_X(s,t) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))].$$

Definition

Um processo estocástico X diz-se estritamente (ou fortemente) estacionário se

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}),$$

para todas as possíveis escolhas de n; $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ e de h.

Definition

Um processo estocástico X diz-se de incrementos estacionários se

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

para todos os valores possíveis de s, t e h.

- Exercício: Mostrar que se um processo X é Gaussiano e fortemente estacionário então $\mu_X(t) = \mu_X(0)$, $\forall t \in T$ e $c_X(s,t) = f(|s-t|)$ é só função da distância $|s-t|$.

Definition

Um processo estocástico diz-se de incrementos independentes se as v.a.

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são independentes sempre que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n = 1, 2, \ldots$

- Todos os processos de incrementos independentes são processos de Markov.

Example

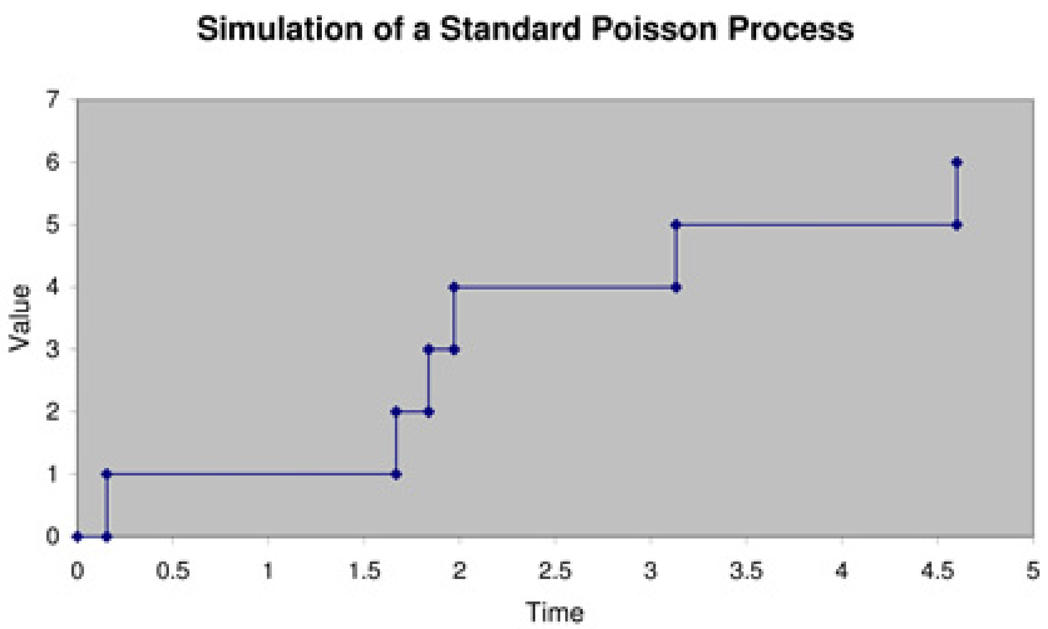
(Processo de Poisson) Um p.e. $\{X_t, t \geq 0\}$ diz-se um processo de Poisson com intensidade λ se

- $X_0 = 0$,
- X tem incrementos estacionários e independentes,
- $X_t \sim Poi(\lambda t)$.

- Se $Y \sim Poi(\lambda)$ então

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

- Exercício: Mostre que se X é um processo de Poisson então $X_t - X_s \sim Poi(\lambda (t - s))$ se $t > s$.



Definition

Um p.e. $\{X_t, t \in T\}$ diz-se equivalente a outro p.e. $\{Y_t, t \in T\}$ se para cada $t \in T$ temos

$$P\{X_t = Y_t\} = 1.$$

Neste caso diz-se que um processo é uma versão do outro.

-
- Dois processos equivalentes podem ter trajectórias muito diferentes.

Example

Seja φ uma v.a.não negativa com distribuição contínua e considere os p.e.

$$X_t = 0,$$
$$Y_t = \begin{cases} 0 & \text{se } \varphi \neq t \\ 1 & \text{se } \varphi = t \end{cases}$$

Os p.e. são equivalentes mas as suas trajectórias são diferentes.

Definition

Dois p.e. $\{X_t, t \in T\}$ e $\{Y_t, t \in T\}$ dizem-se indistinguíveis se

$$X_{\cdot}(\omega) = Y_{\cdot}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \backslash N,$$

onde N tem probabilidade nula $(P(N) = 0)$.

- Dois p. e. com trajectórias contínuas à direita que são equivalentes são também indistinguíveis.