Martingalas

Equações Diferenciais e Cálculo Estocástico

ISEG

Martingalas em tempo discreto

- Espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e sucessão de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ tais que

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

  A sucessão $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ diz-se uma filtração.
- Filtração $\approx$ Fluxo de informação.

Definição

Um p.e. $M = \{M_n; n \geq 0\}$ em tempo discreto diz-se uma martingala relativamente à filtração $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ se:

1. *Para cada n, M_n é uma v.a. $\mathcal{F}_n$-mensurável (i.e., M é um p.e. adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$).*
2. *Para cada n, $E\left[|M_n|\right] < \infty$.*
3. *Para cada n, temos*

$$E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = M_n.$$

- O p.e. $M = \{M_n; n \geq 0\}$ diz-se uma supermartingala (resp. submartingala) se verifica as condições 1 e 2 da def. anterior e se a condição 3 é substituída por $E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \leq M_n$ (resp. $E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \geq M_n$).
- A cond. (3) $\Longrightarrow E\left[M_n\right] = E\left[M_0\right]$ para todo $n \geq 1$. (TPC: prove este resultado)
- A cond (3) $\Longleftrightarrow E\left[\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}\right] = 0$ para todo o $n \geq 1$, onde $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$.
- Cond. 3 $\approx$ "Dada a informação $\mathcal{F}_n$, M_n é a melhor estimativa para M_{n+1}.

Exemplo

(Somas parciais de v.a. independentes): $\{Z_n; n \geq 0\}$ *sucessão de v.a. indep. integráveis e com valor esperado nulo. Seja* $M = \{M_n; n \geq 0\}$ *definido por*

$$M_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n.$$

Considere a filtração natural gerada por $\{Z_n; n \geq 0\}$, *i.e.,*

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_n\right\}.$$

Como $M_0, M_1, \ldots, M_n$ *e* $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ *contêm a mesma informação, geram a mesma* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$. *Provemos que* M *é uma martingala:*
1. M *é adaptado à filtração* $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ *pois* M_n *é* $\mathcal{F}_n$*-mensurável, já que* $\mathcal{F}_n$ *é gerada também por* M_n.
2. $E\left[|M_n|\right] < \infty$, *porque todas as v.a.* Z_n *são integráveis (i.e.* $E\left[|Z_n|\right] < \infty$ *para todo o n).*

Exemplo

3. Pelas propriedades básicas da esperança condicionada:

$$\begin{aligned} E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= E\left[M_n + Z_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n + E\left[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n + E\left[Z_{n+1}\right] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

- Nota: a σ-álgebra $\sigma\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ gerada pelas v.a. $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ contém toda a informação essencial sobre a estrutura do do vector aleatório $\left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ (como "função"de $\omega \in \Omega$).

Lema

Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ uma martingala relativ. à filtração $\{\mathcal{G}_n, n \geq 0\}$ e $\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, \ldots, M_n\} \subset \mathcal{G}_n$ a filtração natural gerada pelo processo M. Então M é uma martingala rel. a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.

Demonstração.

Pela prop. 6 da esperança condicionada e pela prop. de martingala:

$$\begin{aligned} E\left[M_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= E\left[E\left[M_{n+1}|\mathcal{G}_n\right]|\mathcal{F}_n\right] \\ &= E\left[M_n|\mathcal{F}_n\right] \\ &= M_n. \end{aligned}$$

$\square$

- Algumas propriedades das martingalas:
  1. Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala. Então para $m \geq n$:
  $$E[M_m|\mathcal{F}_n] = M_n. \quad \text{(TPC: prove esta propriedade)}$$
  2. $\{M_n; n \geq 0\}$ é submartingala se e só se $\{-M_n; n \geq 0\}$ é supermartingala.
  3. Se $\{M_n; n \geq 0\}$ é martingala e φ é função convexa tal que $E[|\varphi(M_n)|] < \infty \quad \forall n \geq 0$, então $\{\varphi(M_n), n \geq 0\}$ é uma submartingala.
- A prop. 3. é uma consequência da desigualdade de Jensen e tem como corolário: se $\{M_n; n \geq 0\}$ e $E[|M_n|^p] < \infty \quad \forall n \geq 0$ e algum $p \geq 1$, então $\{|M_n|^p, n \geq 0\}$ é submartingala.

Seja $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ uma filtração dada num espaço de probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição

A sucessão de v.a. $\{H_n, n \geq 1\}$ diz-se uma sucessão previsível se H_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável (i.e., se H_n é "conhecida"no instante $n-1$).

Definição

Dada uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala $M = \{M_n; n \geq 0\}$ e uma sucessão previsível $\{H_n, n \geq 1\}$, a sucessão $\{(H \cdot M)_n, n \geq 1\}$, definida por

$$(H \cdot M)_n = M_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$$

diz-se a transformada de martingala de M por $\{H_n, n \geq 1\}$.

- A transformada de martingala de uma sucessão previsível é a versão discreta do integral estocástico:

$$(H \cdot M)_n - M_0 = \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j \approx \int_0^n H_s dM_s.$$

Proposição: Se $M = \{M_n; n \geq 0\}$ é uma martingala e $\{H_n, n \geq 0\}$ é uma sucessão previsível limitada, então a transformada de martingala $\{(H \cdot M)_n, n \geq 1\}$ é uma martingala

Demonstração.

1. $(H \cdot M)_n$ é $\{\mathcal{F}_n\}$-mensurável pois $\sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$ é $\mathcal{F}_n$- mensurável.
2. $(H \cdot M)_n$ é integrável, pois as v .a. M_n são integráveis e as v.a. H_n são limitadas.
3. Pelas propriedades da esperança condicionada:

$$\begin{aligned} E\left[(H \cdot M)_{n+1} - (H \cdot M)_n | \mathcal{F}_n\right] &= E\left[H_{n+1}\left(M_{n+1} - M_n\right) | \mathcal{F}_n\right] \\ &= H_{n+1} E\left[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

$\square$

- Jogo e sistema de apostas: H_n: quantia apostada por jogador na jogada n; $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$: ganhos do jogador na jogada n; M_n: fortuna acumulada do jogador no instante n; $(H \cdot M)_n$:fortuna do jogador se ele usa o sistema de apostas $\{H_n, n \geq 1\}$.
- Se $\{M_n; n \geq 0\}$ é martingala o jogo diz-se justo e $(H \cdot M)_n$ também é martingala - isto é o jogo permanece justo independentemente do sistema de apostas utilizado, desde que $\{H_n, n \geq 0\}$ verifique as condições da proposição anterior.

Exemplo

(apostas a dobrar): Suponha que $M_n = M_0 + Z_1 + \cdots + Z_n$*, onde* $\{Z_n; n \geq 1\}$ *são v.a. indep.que representam a cara* $(+1)$ *ou a coroa* (-1) *de uma moeda:* $P(Z_i = 1) = P(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$*. O jogador começa por apostar um Euro e dobra a sua aposta sempre que sai coroa* (-1) *(dobra a aposta sempre que perde) e termina o jogo quando sai cara* $(+1)$*. Ou seja,* $H_1 = 1$*,* $H_n = 2H_{n-1}$ *se* $Z_{n-1} = -1$ *e* $H_n = 0$ *se* $Z_{n-1} = +1$*.*
Se o jogador perde k jogadas e vence na jogada $k+1$*, obtém:*

$$(H \cdot M)_k = -1 - 2 - 4 - \cdots - 2^{k-1} + 2^k = 1.$$

Parece uma estratégia sempre vencedora, mas atenção que para ser sempre vencedora (com probabilidade 1) requer fundos ilimitados (estratégia de apostas não limitada) e tempo ilimitado.

Exemplo

Sejam $S_n := \left\{S_n^0, S_n^1, n \geq 1\right\}$ *processos adaptados que representam os preços de 2 activos financeiros.* $S_n^0 = (1+r)^n$ *o preço do activo sem risco (obrigação), onde* r *é a taxa de juro (o processo* S_n^0 *é determinístico). Uma carteira é a sucessão de v.a.* $\phi_n := \left\{\phi_n^0, \phi_n^1, n \geq 1\right\}$*, que representa o número de unidades dos activos e o valor da carteira no período* n *é*

$$V_n = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 = \phi_n \cdot S_n$$

A carteira diz-se autofinanciada se, para todo o n*,*

$$V_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \Delta S_j.$$

Esta condição é equivalente a ter, para todo o n*,*

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

Exemplo

Defina os preços descontados

$$\widetilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n = \left(1, (1+r)^{-n} S_n^1\right)$$

É claro que temos

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n &= (1+r)^{-n} V_n = \phi_n \cdot \widetilde{S}_n, \\ \phi_n \cdot \widetilde{S}_n &= \phi_{n+1} \cdot \widetilde{S}_n, \\ \widetilde{V}_n &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j \end{aligned}$$

$\widetilde{V}_n = \left(\phi_n^1 \cdot \widetilde{S}^1\right)_n$ *é a transformada martingala de* $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ *pelo processo previsível* $\left\{\phi_n^1\right\}$*. Então, se* $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ *for uma martingala e se* $\left\{\phi_n^1\right\}$ *for sucessão limitada, temos que* $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ *também será uma martingala.*

Exemplo

Uma probabilidade Q equivalente a P é uma probabilidade neutra face ao risco (risk neutral probability measure) se no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, o processo $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ for uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala. Nesse caso, se $\left\{\phi_n^1\right\}$ for limitada, $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ também será uma martingala.
No modelo Binomial, assume-se que as v.a.

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

são independentes e assumem os valores $1 + a$ e $1 + b$ com probabilidades p e $1 - p$, resp., com $a < r < b$.

Exemplo

Determinemos p (ou seja a medida de probabilidade Q) de forma a que $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ seja martingala.

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= (1+r)^{-n-1} E\left[S_n T_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \widetilde{S}_n (1+r)^{-1} E\left[T_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \widetilde{S}_n (1+r)^{-1} E\left[T_{n+1}\right] \end{aligned}$$

Logo, $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ é martingala se $E\left[T_{n+1}\right] = (1+r)$, ou seja

$$E\left[T_{n+1}\right] = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1+r$$

e portanto

$$p = \frac{b-r}{b-a}.$$

Exemplo

Considere agora uma v.a. H que é $\{\mathcal{F}_N\}$-mensurável e que representa o payoff de um derivado sobre o activo 1 e com maturidade no instante N. Por exemplo, uma opção "call"com preço de exercício K tem payoff $H = (S_T - K)^+$. O derivado diz-se replicável se existir uma carteira auto-financiada tal que

$$V_N = H.$$

O preço do derivado será o valor desta carteira. Como $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ é uma martingala no espaço de probabilidade, temos

$$\begin{aligned} V_n &= (1+r)^n \widetilde{V}_n = (1+r)^n E_Q\left[\widetilde{V}_N|\mathcal{F}_n\right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} E_Q\left[H|\mathcal{F}_n\right] \end{aligned}$$

Se $n = 0$, temos que $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ e

$$V_0 = (1+r)^{-N} E_Q[H].$$

Martingalas em tempo contínuo

- As martingalas em tempo contínuo definem-se de forma análoga às martingalas em tempo discreto e a maioria das propriedades das martingalas em tempo discreto continuam a ser válidas em tempo contínuo.
- Espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e família de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ tais que

  $$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t.$$

  A sucessão $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ diz-se uma filtração.
- Seja $\mathcal{F}_t^X$ a σ-álgebra gerada pelo processo X no intervalo $[0, t]$, i.e. $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Então $\mathcal{F}_t^X$ é a "informação gerada por X no intervalo $[0, t]$".
- $A \in \mathcal{F}_t^X$ significa que é possível decidir se o acontecimento A ocorreu ou não, baseando-nos nas observações das trajectórias do processo X em $[0, t]$.
- Exemplo: Se $A = \{\omega : X(5) > 1\}$ então $A \in \mathcal{F}_5^X$ mas $A \notin \mathcal{F}_4^X$.

Definição

Um p.e. $M = \{M_t; t \geq 0\}$ *diz-se uma martingala relativamente à filtração* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *se:*

1. *Para cada* $t \geq 0$, M_t *é uma v.a.* $\mathcal{F}_t$*-mensurável (i.e.,* M *é um p.e. adaptado à filtração* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*).*
2. *Para cada* $t \geq 0$, $E[|M_t|] < \infty$.
3. *Para cada* $s \leq t$, *temos*

$$E[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s.$$

- A cond (3) $\Longleftrightarrow E[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] = 0$.
- Se $t \in [0, T]$ então $M_t = E[M_T|\mathcal{F}_t]$.
- As definições de supermartingala e submartingala são análogas às definições para o tempo discreto.
- Tal como no caso discreto, a cond. (3) $\Longrightarrow E[M_t] = E[M_0]$ para todo t.

Temos a seguinte generalização da desigualdade de Chebyshev (análoga à versão em tempo discreto).

Teorema

(Desigualdade maximal (ou de martingala) de Doob): Se $M = \{M_t; t \geq 0\}$ *é uma martingala com trajectórias contínuas então, para todo* $p \geq 1$*,* $T \geq 0$ *e* $\lambda > 0$*,*

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p}\left[E\,|M_T|^p\right]$$

Para uma demonstração deste teorema na versão discreta (baseada no teorema da paragem opcional) ver "Stochastic Calculus - D. Nualart".