



# Cap. 1 Complementos de PL

Sistemas de Apoio à Decisão

Optativa



**LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**  
UNIVERSIDADE DE LISBOA



## Complementos de PL

### OBJETIVOS

- Formular problemas em PL e em PLI
- Identificar problemas que podem ser resolvidos por PL / PLI
- Resolver problemas de PL/PLI: Solver/Excel; Gráficos
- Interpretar/Validar soluções

2

## Complementos de PL



### Modelo de PL na forma *standard*

Dados do problema:

$c_j$  **coeficiente** da  $j$ -ésima variável de decisão **na função objetivo**

$b_i$  **segundo membro** ou **termo independente (TI)** da  $i$ -ésima restrição funcional

$a_{ij}$  **coeficiente técnico** da  $j$ -ésima variável de decisão na  $i$ -ésima restrição funcional

Variáveis de decisão:  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$$Z^* = \text{Max } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{Função objetivo (FO)}$$

$$\text{s. a: } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1, 2, \dots, m \quad \text{Restrições funcionais} \\ x_j \geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \quad \text{Restrições de sinal} \end{cases}$$

3

## Complementos de PL



### Definições

**Solução** de um PL - vetor de  $\mathbb{R}^n$  cujas componentes representam os valores das variáveis de decisão

**Solução Admissível (SA)** - solução que satisfaça todas as restrições (funcionais e de sinal)

**Solução não admissível (SNA)** - solução que não verifica pelo menos uma das restrições

**Região admissível (RA)** - conjunto de todas as soluções admissíveis

**Solução ótima (SO)** - uma solução admissível que origina o melhor valor para a função objetivo (FO)

**Soluções ótimas alternativas** - diferentes soluções ótimas de um mesmo problema, caso existam

**Valor ótimo** - valor da função objetivo numa solução ótima

**Restrição saturada** numa solução de um problema de PL quando esta a verifica na igualdade

4

## Complementos de PL



### Hipóteses da PL

**Proporcionalidade:** A contribuição de cada atividade ( $j$ ) para o valor da função objetivo e primeiro membro das restrições é proporcional ao nível da atividade  ~~$x_j$~~   ~~$\log(x_j)$~~

$$a_{ij} x_j; c_j x_j$$

**Aditividade:** Os valores da função objetivo e do primeiro membro das restrições obtêm-se por soma das contribuições individuais das várias atividades  ~~$x_1 x_2$~~

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2; c_1 x_1 + c_2 x_2$$

**Divisibilidade:** As variáveis assumem valores em intervalos reais

**Certeza:** Todos os parâmetros ( $c_j$ ;  $b_i$ ;  $a_{ij}$ ) são constantes reais conhecidas

5

## Complementos de PL



### Propriedades

**Propriedade 1:** A RA de um problema de PL ou é um conjunto vazio ou é um conjunto convexo

**Propriedade 2:** Se a RA de um problema de PL é não vazia e limitada, então existe solução ótima

**Propriedade 3:** Se um problema de PL tem ótimo, então pelo menos um dos pontos extremos da RA é solução ótima

**Propriedade 4:** Dado um problema de PL com ótimo, se um ponto extremo da região admissível não tem pontos extremos adjacentes com melhor valor para a função objetivo, então esse ponto extremo é solução ótima

6

## Resolução Gráfica



### Resolução Gráfica - 2 Variáveis de Decisão

- 1)  $RA = \cap$  de semiplanos definidos por todas as restrições de sinal e funcionais do PL
- 2) Se  $RA = \emptyset$  o problema é impossível
- 3) Se  $RA \neq \emptyset$  identificar, caso exista, o(s) ponto(s) ótimo(s):
  - Representar uma reta de nível da FO (atribuindo um valor arbitrário a  $Z$ ) e identificar o sentido de otimização
  - Identificar o(s) ponto(s) da RA a que corresponde o melhor valor de  $Z$  (ou seja, identificar as SOs), ou concluir que o problema tem valor ótimo ilimitado (não tem solução ótima)

7

## Resolução no Solver



		Dados				
	A	B	C	D	E	F
1	<b>Exemplo 1</b>					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m.)	2	8	0	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	0		
7	Unidades a produzir de	0	0			

		D
3		=SUMPRODUCT(B3:C3;\$B\$7:\$C\$7)
4		=SUMPRODUCT(B4:C4;\$B\$7:\$C\$7)
5		=SUMPRODUCT(B5:C5;\$B\$7:\$C\$7)
6		=SUMPRODUCT(B6:C6;\$B\$7:\$C\$7)

Valores Iniciais

8

## Resolução no Solver

	P1	P2			Disponibilidades/ Exigências
1 Exemplo 1					
2					
3 Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	0	<=	10
4 Secção de Embalagem (h.m.)	2	8	0	<=	32
5 Imposição de mercado	1	-1	0	>=	2
6 lucro (u.m.)	2	4	0		
7 Unidades a produzir de	0	0			

Solver Parameters dialog box showing:

- Set Objective: \$D\$6
- To: Max
- By Changing Variable Cells: \$B\$7:\$C\$7
- Subject to the Constraints:
  - \$D\$3:\$D\$4 <= \$F\$3:\$F\$4
  - \$D\$5 >= \$F\$5

Add Constraint dialog box showing:

- Cell Reference: \$D\$3:\$D\$4
- Constraint: <= \$F\$3:\$F\$4

9

## Resolução no Solver

Solver Parameters dialog box showing:

- Set Objective: \$D\$6
- To: Max
- By Changing Variable Cells: \$B\$7:\$C\$7
- Subject to the Constraints:
  - \$D\$3:\$D\$4 <= \$F\$3:\$F\$4
  - \$D\$5 >= \$F\$5
- Make Unconstrained Variables Non-Negative
- Select a Solving Method: Simplex LP
- Solving Method: Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Solve button highlighted.

10

## Resolução no Solver



	A	B	C	D	E	F
1	<b>Exemplo 1</b>					Disponibilidades/ Exigências
2		P1	P2			
3	Secção de Fabrico (h.m.)	1	1	10	<=	10
4	Secção de Embalagem (h.m)	2	8	32	<=	32
5	Imposição de mercado	1	-1	6	>=	2
6	lucro (u.m.)	2	4	24		
7	Unidades a produzir de	8	2			

Solver Results

Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Keep Solver Solution

Restore Original Values

Return to Solver Parameters Dialog

Outline Reports

OK Cancel Save Scenario...

Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

When the GRG engine is used, Solver has found at least a local optimal solution. When Simplex LP is used, this means Solver has found a global optimal solution.

11

## Resolução no Solver



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	<b>Microsoft Excel 14.0 Answer Report</b>											
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1											
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32											
4	Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.											
5	<b>Solver Engine</b>											
6	Engine: Simplex LP											
7	Solution Time: 0 Seconds.											
8	Iterations: 3 Subproblems: 0											
9	<b>Solver Options</b>											
10	Max Time 100 sec, Iterations 100, Precision 0,000001											
11	Max Subproblems Unlimited, Max Integer Sols Unlimited, Integer Tolerance 5%, Solve Without Integer Constraints, Assume NonNegative											
12												
13												
14	<b>Objective Cell (Max)</b>											
15	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Original Value</b>	<b>Final Value</b>								
16	\$D\$6	lucro (u.m.)	0	24								
17												
18												
19	<b>Variable Cells</b>											
20	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Original Value</b>	<b>Final Value</b>	<b>Integer</b>							
21	\$B\$7	Unidades a produzir de P1	0	8	Contin							
22	\$C\$7	Unidades a produzir de P2	0	2	Contin							
23												
24												
25	<b>Constraints</b>											
26	<b>Cell</b>	<b>Name</b>	<b>Cell Value</b>	<b>Formula</b>	<b>Status</b>	<b>Slack</b>						
27	\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	\$D\$3<=\$F\$3	Binding	0						
28	\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m)	32	\$D\$4<=\$F\$4	Binding	0						
29	\$D\$5	Imposição de mercado	6	\$D\$5>=\$F\$5	Not Binding	4						
30												

12

## Resolução no Solver

	A	B	C	D	E	F	G	H																												
1	Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report																																			
2	Worksheet: [ex1_PL.xls]ex1																																			
3	Report Created: 08-02-2012 11:50:32																																			
4																																				
5																																				
6	Variable Cells																																			
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cell</th> <th>Name</th> <th>Final Value</th> <th>Reduced Cost</th> <th>Objective Coefficient</th> <th>Allowable Increase</th> <th>Allowable Decrease</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$B\$7</td> <td>Unidades a produzir de P1</td> <td>8</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>2</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>\$C\$7</td> <td>Unidades a produzir de P2</td> <td>2</td> <td>0</td> <td>4</td> <td>4</td> <td>2</td> </tr> </tbody> </table>								Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease	\$B\$7	Unidades a produzir de P1	8	0	2	2	1	\$C\$7	Unidades a produzir de P2	2	0	4	4	2							
Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease																														
\$B\$7	Unidades a produzir de P1	8	0	2	2	1																														
\$C\$7	Unidades a produzir de P2	2	0	4	4	2																														
11																																				
12	Constraints																																			
13	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cell</th> <th>Name</th> <th>Final Value</th> <th>Shadow Price</th> <th>Constraint R.H. Side</th> <th>Allowable Increase</th> <th>Allowable Decrease</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$D\$3</td> <td>Secção de Fabrico (h.m.)</td> <td>10</td> <td>1,333333333</td> <td>10</td> <td>6</td> <td>2,4</td> </tr> <tr> <td>\$D\$4</td> <td>Secção de Embalagem (h.m.)</td> <td>32</td> <td>0,333333333</td> <td>32</td> <td>12</td> <td>12</td> </tr> <tr> <td>\$D\$5</td> <td>Imposição de mercado</td> <td>6</td> <td>0</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>1E+30</td> </tr> </tbody> </table>								Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease	\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	1,333333333	10	6	2,4	\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m.)	32	0,333333333	32	12	12	\$D\$5	Imposição de mercado	6	0	2	4	1E+30
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease																														
\$D\$3	Secção de Fabrico (h.m.)	10	1,333333333	10	6	2,4																														
\$D\$4	Secção de Embalagem (h.m.)	32	0,333333333	32	12	12																														
\$D\$5	Imposição de mercado	6	0	2	4	1E+30																														
14																																				
15																																				
16																																				
17																																				

13

## Resolução no Solver -2003

**Solver Parameters**

Set Target Cell:

Equal To:  Max  Min  Value of:

By Changing Cells:

Subject to the Constraints:

**Solver Options**

Max Time:  seconds

Iterations:

Precision:

Tolerance:  %

Convergence:

Assume Linear Model  Use Automatic Scaling

Assume Non-Negative  Show Iteration Results

Estimates:  Tangent  Quadratic

Derivatives:  Forward  Central

Search:  Newton  Conjugate

14

## Resolução no Solver – 2003



	A	B	C	D	E	F	G
2			de portas	de janelas			Disponibilidades
3		h-m de F1	1	0	2	≤	4
4		h-m de F2	0	2	12	≤	12
5		h-m de F3	3	2	18	≤	18
6		Lucro	3	5	36		
7		Nº de lotes	2	6			
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							

**Solver Results**

Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

Reports

- Answer
- Sensitivity
- Limits

OK Cancel Save Scenario... Help

15

## Resolução no Solver – 2003



Microsoft Excel 10.0 Answer Report  
 Worksheet: [ex\_prototipo.xls]Ex. Protótipo  
 Report Created: 30-09-2009 11:40:41

## Target Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$E\$6	Lucro	0	36

## Adjustable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$C\$7	Nº de lotes de portas	0	2
\$D\$7	Nº de lotes de janelas	0	6

## Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$E\$3	h-m de F1	2	\$E\$3<=\$G\$3	Not Binding	2
\$E\$4	h-m de F2	12	\$E\$4<=\$G\$4	Binding	0
\$E\$5	h-m de F3	18	\$E\$5<=\$G\$5	Binding	0


16



# Sistemas de Apoio à Decisão

aula 2

Cap. 1



**ISEG** LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

## Complementos de PL

**Definições**

**Forma aumentada de um PL** - PL com:

todas as variáveis são não negativas e  
todas as restrições funcionais estão expressas por equações

↑ + variáveis não negativas

**variáveis auxiliares** ou **variáveis desvio** ou **variáveis de folga**

**Solução aumentada** - uma solução do problema na forma aumentada.

**Propriedades**

**Propriedade 5:** Qualquer problema de PL pode ser escrito como um problema de PL equivalente na forma aumentada de maximização.

18

## Complementos de PL



### Passagem de modelos de PL à forma aumentada de maximização

**Objetivo:**  $\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Leftrightarrow \text{Max}(-Z) = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$  (Min  $Z = -\text{Max}(-Z)$ )

#### Restrições:

$$“\leq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

$$“\geq” : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \wedge x_{n+i} \geq 0$$

#### Variáveis:

$$x_j \leq 0 \Leftrightarrow x_j = -x'_j (x'_j \geq 0)$$

$$x_j \text{ livre} \Leftrightarrow x_j = x'_j - x''_j \quad \left( \begin{array}{l} x'_j = \text{Max}\{0; x_j\} \geq 0 \\ x''_j = \text{Max}\{0; -x_j\} \geq 0 \end{array} \right)$$

19

## Complementos de PL



### Definições

Dado um PL na forma aumentada com  $m$  equações e  $\ell$  variáveis

Igualar a zero  $\ell - m$  **variáveis não básicas (VNB)**. Se for possível resolver, de forma única, o sistema de equações lineares em relação às restantes  $m$  variáveis - **variáveis básicas (VB)**

→ **Solução básica (SB)**.

**Solução básica admissível (SBA)** - SB em que todas as variáveis respeitam as restrições de sinal. Caso contrário, é uma **solução básica não admissível (SBNA)**.

1 SBA → 1 ponto extremo da RA

1 ponto extremo da RA → pelo menos uma SBA

**Soluções básicas adjacentes** - apenas uma VB diferente ( $\mathbb{R}^2$  - extremos do segmento de reta)

20

## Dualidade



PRIMAL	DUAL
Maximizar (Max $Z$ )	Minimizar (Min $W$ )
1 restrição	1 variável de decisão
$i$ -ésima restrição de tipo " $\leq$ "	$y_i \geq 0$
$i$ -ésima restrição de tipo " $\geq$ "	$y_i \leq 0$
$i$ -ésima restrição de tipo " $=$ "	$y_i$ livre
Tl: $b_i; i = 1, \dots, m$	FO: $W = b_1 y_1 + \dots + b_m y_m$
FO: $Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$	Tl: $c_j; j = 1, \dots, n$
1 variável de decisão	1 restrição
$x_j \geq 0$	$j$ -ésima restrição de tipo " $\geq$ "
$x_j \leq 0$	$j$ -ésima restrição de tipo " $\leq$ "
$x_j$ livre	$j$ -ésima restrição de tipo " $=$ "
matriz de coeficientes técnicos: $A$	matriz de coeficientes técnicos: $A^T$

21

## Dualidade



(P) Min  $Z \Leftrightarrow$  (D) Max  $W$

**Restrição** primal de tipo " $\geq$ "  $\Leftrightarrow$  variável dual  $\geq 0$ ;

**Restrição** primal de tipo " $\leq$ "  $\Leftrightarrow$  variável dual  $\leq 0$ ;

**Variável** primal  $\geq 0$   $\Leftrightarrow$  restrição dual de tipo " $\leq$ ";

**Variável** primal  $\leq 0$   $\Leftrightarrow$  restrição dual de tipo " $\geq$ ".

O  $i$ -ésimo **preço-sombra** (valor ótimo de  $y_i$ ) representa a proporção de variação no valor ótimo do primal em função do acréscimo no  $i$ -ésimo termo independente, compatível com o respetivo intervalo de sensibilidade.

22

## Dualidade



### Propriedades

**Propriedade 6:** O dual do dual é o primal.

**Propriedade 7:** Dado um par de problemas duais, se uma SA do problema de maximização,  $\mathbf{x}'$ , tem valor  $Z'$  e uma SA do problema de minimização,  $\mathbf{y}'$ , tem valor  $W'$ , então  $Z' \leq W'$ .

Se  $Z' = W'$ , então  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{y}'$  são soluções ótimas dos respetivos problemas.

23

## Dualidade



	PRIMAL	Tem SA	Não tem SA
DUAL			
Tem SA		Os dois problemas têm SO e $Z^* = W^*$	Primal impossível Dual ilimitado
Não tem SA		Primal ilimitado Dual impossível	Primal impossível Dual impossível

**Soluções complementares** – verificam as **relações de desvios complementares**

Problema (P1)

Dual de (P1)

- i) variável de decisão VB ( $\neq 0$ )  $\Rightarrow$  restrição saturada (variável desvio = 0; VNB)
- ii) restrição não saturada (variável desvio é VB)  $\Rightarrow$  variável de decisão = 0 (VNB)

24

## Dualidade



**Determinação da SOD:**  $y_i = \Delta Z$  se  $\Delta b_i = +1$

Resolvido o Primal:

- **Gráfico** – calcular  $y_i$ ; resolver o novo PL alterando  $\Delta b_i = +1$ . Calcular:  $\Delta Z = y_i$ .
- **Relações de complementaridade:** Identificar o valor das VNB ( $= 0$ ) do dual (D), tendo em conta as VB do (P), e resolver o sistema de equações (forma aumentada) do (D).
- **Solver – Relatório de Sensibilidade** – Coluna “Shadow Price”

**Interpretação Económica!**

25

## Análise de Sensibilidade – TI



- A SO é sensível a alterações nos dados (parâmetros) do problema?


**Termo Independente:**  $b_i$

**IS** – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um TI mantendo a **base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se  $\Delta b_i \in IS$ :

- mantem-se base ótima e os preços-sombra (SOD)
- Altera-se: SOP e  $Z^*$ , com  $\Delta Z = y_i \times \Delta b_i$

26



## Análise de Sensibilidade – Coeficientes FO

**Coeficiente da FO:  $c_j$**

**IS** – intervalo de sensibilidade – intervalo de variações de um  $c_j$  mantendo a **base ótima** (o {VNB} e o {VB})

Se  $\Delta c_j \in IS$ :

- mantem-se Base ótima e SOP
- Altera-se: SOD e  $Z^*$ , com  $\Delta Z = x_j \times \Delta c_j$ .

**Restrição Adicional & Nova Variável**

27

# Gestão

Sistemas de Apoio à Decisão

Cap. 1 - FIM




**LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**  
UNIVERSIDADE DE LISBOA