

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 2¹

- (1) Seja $C = \{x \in \mathbb{R} : x(x^2 - 2) \leq 0\}$.
(a) Calcule o conjunto dos minorantes e dos majorantes de C .
(b) Calcule $C \cap \mathbb{Q}$ e indique, caso existam, o sup e o max de C e de $C \cap \mathbb{Q}$.

- (2) Indique os majorantes de $A \cap \mathbb{Q}$ e de $B \cap \mathbb{Q}$, onde

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x} \geq |x - 1| \right\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}.$$

- (3) Usando o princípio de indução matemática, prove as seguintes proposições para todo o $n \in \mathbb{N}$:

- (a) (soma dos primeiros n termos da progressão aritmética)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- (b) (soma dos primeiros n termos da progressão geométrica) para $r \neq 1$,

$$\sum_{k=1}^n r^k = r \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

- (c) (desigualdade de Bernoulli) para $a > 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

- (d)

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

(Compare com o resultado de (3a).)

- (4) Sejam as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$, e os conjuntos $C = \{-1, 0, 1\}$ e $D = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 3\}$. Determine os seguintes conjuntos imagem

- (a) $f(C)$, $f(D)$, $f(\mathbb{N})$, $f(\mathbb{R})$.

- (b) $g(C)$, $g(D)$, $g(\mathbb{N})$, $g(\mathbb{R})$.

- (5) Diga se as seguintes funções são injectivas e/ou sobrejectivas. Em caso de serem injectivas indique a sua inversa.

¹As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante deve escrever as suas próprias soluções e compreendê-las.

(a) $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(b) $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-1}$

(c) $u: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $u(x) = x + 1$

(d) $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, $v(x) = 1 + |[x]|$, onde $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$ é a parte inteira de x (i.e. o maior inteiro não superior a x).

(6) Determine o conjunto dos majorantes e minorantes dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R} indicando, sempre que possível, o supremo e o ínfimo de cada um deles:

(a) $[0, 2] \cup]3, 5[\cup \{6, 7\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R}: x^2 < 9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R}: 0 < |x - 3| \leq 5\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R}: x - 1 \geq x\}$

(e) $\{x \in \mathbb{R}: (x - 1)/(x + 3) > x/(x - 2)\}$

(f) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$.

(7) (*) Considere a sucessão de Fibonacci dada por

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prove por indução que

$$u_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$