Cálculo Estocástico

João Guerra

10/02/2012

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

O objectivo fundamental deste texto é introduzir os conceitos fundamentais de cálculo estocástico aos alunos de mestrado, pós-graduação ou doutoramento em matemática financeira. Em particular, este é o texto teórico de base para a unidade curricular de "Cálculo Estocástico"do Mestrado em Matemática Financeira, ISEG, Universidade Técnica de Lisboa, ano lectivo de 2011/2012.

Pretende-se explorar as principais técnicas e métodos do cálculo estocástico e da teoria de equações diferenciais estocásticas, relacionar as equações diferenciais estocásticas e as equações diferenciais parciais e aplicar as técnicas e métodos do cálculo estocástico a problemas e modelos da matemática financeira, em particular na avaliação e cobertura de risco de produtos financeiros derivados como opções ou futuros.

Para abordar este texto com proveito, o leitor deve ter conhecimentos (ao nível de licenciatura) de cálculo diferencial e integral, teoria da probabilidade (e alguma coisa de teoria da medida), teoria de processos estocásticos e alguns conhecimentos de equações diferenciais ordinárias e parciais também podem ser úteis embora não sejam essenciais.

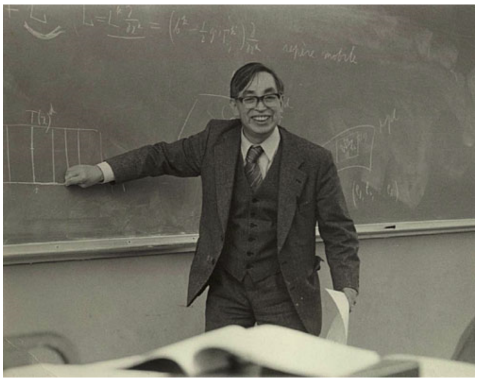
1.1 O que é o cálculo estocástico?

Muito resumidamente, o cálculo estocástico é um tipo de cálculo integral e diferencial que envolve processos estocásticos em tempo contínuo, como por exemplo o movimento Browniano. O cálculo estocástico permite definir integrais de processos estocásticos, onde a "função integradora"é também um processo estocástico. Podemos também definir e resolver equações diferenciais estocásticas, que são básicamente equações diferenciais ordinárias com um termo aleatório.

O processo estocástico mais importante para as aplicações financeiras e que é um processo paradigmático na desenvolvimento do cálculo estocástico é o movimento Browniano. Por isso vamos focar a teoria na integração estocástica relativamente ao movimento Browniano. Os tópicos fundamentais apresentados neste texto são a construção de integrais estocásticos, a fórmula de Itô, equações diferenciais estocásticas, o Teorema de Girsanov, a discussão das relações entre equações diferenciais estocásticas e equações diferenciais parciais e aplicações ao modelo de Black-Scholes para avaliação de derivados financeiros. Antes de abordarmos estes tópicos, começaremos por apresentar alguns resultados fundamentais sobre processos estocásticos, esperança condicional, martingalas e movimento Browniano.

Para além da avaliação e cobertura de risco de opções e outros derivados financeiros, outras aplicações importantes do cálculo estocástico em finanças são feitas em modelos de taxas de juro e risco de crédito, por exemplo.

Relativamente à teoria do movimento Browniano e cálculo estocástico, ela foi desenvolvida por alguns dos matemáticos e físicos mais importantes do século XX. Com contribuições fundamentais, podemos destacar Louis Bachelier, Albert Einstein, Norbert Wiener, Andrey Kolmogorov, Vincent Doeblin, Kiyosi Itô, Joseph Doob and Paul-André Meyer. Uma breve história do cálculo estocástico e das suas aplicações financeiras é apresentada no artigo de Jarrow e Protter em [4], cuja leitura vivamente se recomenda.



Kiyosi Itô


Andrey Kolmogorov

Capítulo 2

Probabilidade e processos estocásticos

2.1 Processos estocásticos

Começaremos por apresentar a definição clássica de processo estocástico.

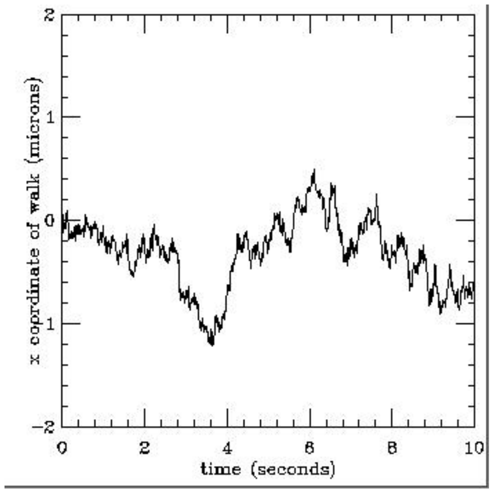
Definição 2.1 *Um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias* $\{X_t, t \in T\}$ *definidas num espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *O conjunto* T *é o conjunto onde está definido o parâmetro* t. *Se* $T = \mathbb{N}$, *o processo diz-se em tempo discreto, mas se* $T = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *ou se* $T = \mathbb{R}$, *o processo diz-se em tempo contínuo.*

Um processo estocástico pode considerar-se uma aplicação de duas variáveis: as variáveis $t \in T$ e $\omega \in \Omega$:

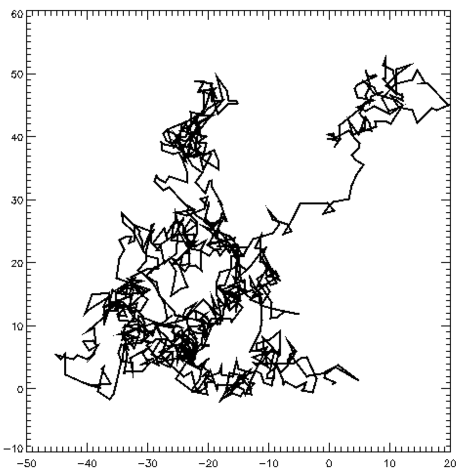
$$\{X_t, t \in T\} = \{X_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in T\},$$

onde X_t representa o estado ou posição do processo no instante t. O espaço de estados (espaço onde as varáveis aleatórias tomam valores) normalmente é $\mathbb{R}$ (processo com espaço de estados contínuo) ou $\mathbb{N}$ (espaço de estados discretos).

Para cada ω fixado ($\omega \in \Omega$), a aplicação $t \rightarrow X_t(\omega)$ ou $X_.(\omega)$ diz-se uma trajectória do processo. Como exemplos de trajectórias apresentam-se a seguir trajectórias de um movimento Browniano unidimensional e bidimensional.



Trajectória de movimento
Browniano unidimensional



Trajectória de movimento
Browniano bidimensional

Exemplo 2.2 *Considere a sucessão de variáveis aleatórias independentes* $\{Z_t, t \in \mathbb{N}\}$*. Então*

$$X_t = Z_1 + Z_2 + \cdots Z_t = X_{t-1} + Z_t$$

é um processo estocástico em tempo discreto. Este processo estocástico é conhecido como passeio aleatório.

Um conceito fundamental em teoria de processos estocásticos é o conceito de processo de Markov. Um processo para o qual, "dado o presente, o futuro é independente do passado". Um processo de Markov é um processo em que a probabilidade de obter um estado num momento futuro t depende apenas do estado do processo no último instante observado t_k, i.e., se $t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t$, então

$$P\left[a < X_t < b | X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_k} = x_k\right] = P\left[a < X_t < b | X_{t_k} = x_k\right].$$

Um processo de Markov com espaço de estados discreto diz-se uma cadeia de Markov. Se for com espaço de estados contínuo e parametro contínuo, diz-se um processo de difusão.

Para caracterizar probabilisticamente um processo X usa-se o conceito de distribuição de dimensão finita.

Definição 2.3 *Seja $\{X_t, t \in T\}$ um processo estocástico. As distribuições de dimensão finita (ou ddf) de X são todas as distribuições dos vectores*

$$\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right),$$

onde $n = 1, 2, 3, \ldots; t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$.

A lei de probabilidade ou distribuição de um processo estocástico identifica-se com a família das distribuições de dimensão finita desse processo.

Definição 2.4 *(processo Gaussiano) Um processo diz-se Gaussiano quando todas as ddf são Gaussianas.*

O conhecimento dos parâmetros μ (valor esperado) e Σ (covariância) é suficiente para caracterizar uma distribuição Gaussiana. Logo, para caracterizar um processo Gaussiano, basta conhecer μ e Σ para todos os vectores do tipo $\left(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}\right)$.

Exemplo 2.5 *(ruído branco) Seja $\{X_t, t \geq 0\}$ um processo estocástico com $X_t \sim N(0, \sigma^2)$, sendo todas as variáveis aleatórias do processo independentes. Então o processo é Gaussiano e as ddf podem ser descritas pelas funções de distribuição*

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= P\left(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n\right) \\ &= P(X_{t_1} \leq x_1) P\left(X_{t_2} \leq x_2\right) \ldots P\left(X_{t_n} \leq x_n\right) \\ &= \Phi(x_1) \Phi\left(x_2\right) \ldots \Phi\left(x_n\right). \end{aligned}$$

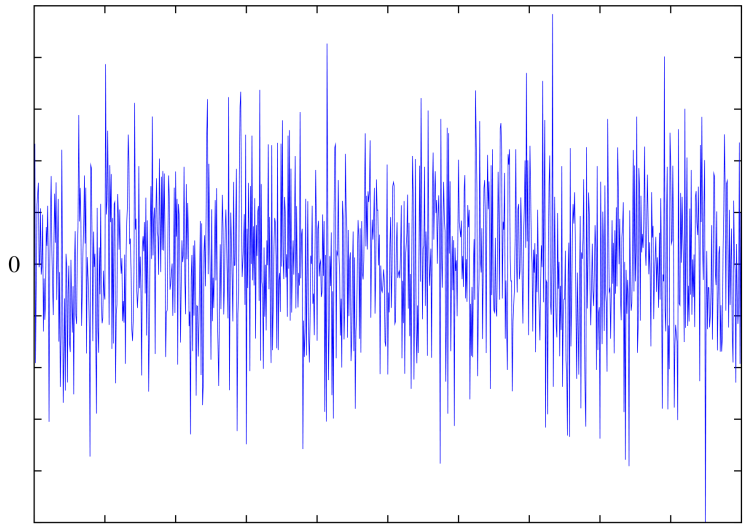


Figura 2.1: Uma trajectória do processo ruído branco

A função valor esperado e a função de covariância de X são:

$$\mu_X(t) = E[X_t] = 0,$$
$$c_X(s,t) = \begin{cases} \sigma^2 & se\ s = t \\ 0 & se\ s \neq t \end{cases}.$$

Em geral, dado um processo X, podemos definir as funções valor esperado e de covariância por

$$\mu_X(t) = E[X_t],$$
$$c_X(s,t) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_X(s))].$$

Um importante conceito é o de estacionaridade ou invariância da distribuição. Define-se agora o que se entende por processo estacionário e por processo de incrementos estacionários.

Definição 2.6 *Um processo estocástico X diz-se estritamente (ou fortemente) estacionário se*

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}) \stackrel{d}{=} (X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_n+h}),$$

para todas as possíveis escolhas de n; $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ e de h.

Definição 2.7 *Um processo estocástico X diz-se de incrementos estacionários se*

$$X_t - X_s \stackrel{d}{=} X_{t+h} - X_{s+h},$$

para todos os valores possíveis de s, t e h.

Exercício 2.8 *Mostrar que se um processo X é Gaussiano e fortemente estacionário então $\mu_X(t) = \mu_X(0)$, $\forall t \in T$ e $c_X(s,t) = f(|s-t|)$ é só função da distância $|s-t|$.*

A independência de incrementos de um processo é uma propriedade fundamental e vai ser abundantemente usado quando discutirmos o integral estocástico. Apresenta-se agora a definição deste conceito.

Definição 2.9 *Um processo estocástico diz-se de incrementos independentes se as v.a.*

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são independentes sempre que $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Todos os processos de incrementos independentes são processos de Markov. Vejamos um exemplo importante de um processo de incrementos independentes: o processo de Poisson.

Exemplo 2.10 *(Processo de Poisson) Um processo estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ diz-se um processo de Poisson com intensidade λ se*

1. $X_0 = 0$,
2. *X tem incrementos estacionários e independentes,*
3. $X_t \sim Poi(\lambda t)$.

Uma variável aleatória Y tem a distribuição (discreta) de Poisson de parâmetro λ, ou $Poi(\lambda)$, se

$$P(Y = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Exercício 2.11 *Mostre que se X é um processo de Poisson então $X_t - X_s \sim Poi(\lambda(t-s))$ se $t > s$.*

Como definir a equivalência de processos? A próxima definição oferece uma resposta.

Definição 2.12 *Um processo estocástico $\{X_t, t \in T\}$ diz-se equivalente a outro processo estocástico $\{Y_t, t \in T\}$ se para cada $t \in T$ temos*

$$P\{X_t = Y_t\} = 1.$$

Neste caso diz-se que um processo é uma versão do outro.

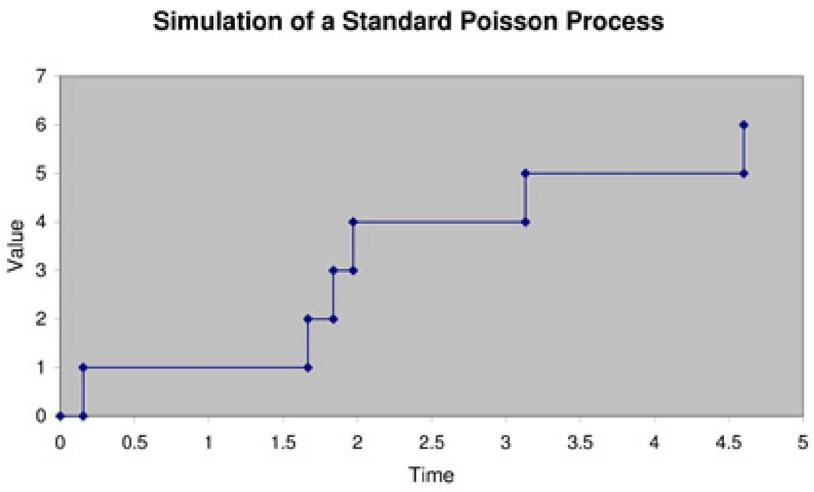


Figura 2.2: Uma trajectória do processo de Poisson

Note-se que dois processos equivalentes podem ter trajectórias muito diferentes, como se ilustra no próximo exemplo.

Exemplo 2.13 *Seja φ uma variável aleatória não negativa com distribuição contínua e considere os processos estocásticos*

$$X_t = 0,$$
$$Y_t = \begin{cases} 0 & se\ \varphi \neq t \\ 1 & se\ \varphi = t \end{cases}.$$

Os processos são equivalentes mas as suas trajectórias são diferentes. As trajectórias de Y têm sempre um ponto de descontinuidade.

Definição 2.14 *Dois processos estocásticos $\{X_t, t \in T\}$ e $\{Y_t, t \in T\}$ dizem-se indistinguíveis se*

$$X_\cdot(\omega) = Y_\cdot(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega \backslash N,$$

onde N tem probabilidade nula ($P(N) = 0$).

Dois processos estocásticos com trajectórias contínuas à direita (ou contínuas à esquerda, ou contínuas) que são equivalentes são também indistinguíveis. Para além da continuidade trajectorial, podemos definir outros conceitos de probabilidade para processos estocásticos.

Definição 2.15 *Um processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ com valores em $\mathbb{R}$ e onde T é um intervalo de $\mathbb{R}$, diz-se contínuo em probabilidade se, para qualquer $\varepsilon > 0$ e para qualquer $t \in T$, temos*

$$\lim_{s \to t} P\left[|X_s - X_t| > \varepsilon\right] = 0.$$

Definição 2.16 *Seja $p \geq 1$. Um processo estocástico $\{X_t; t \in T\}$ com valores em $\mathbb{R}$, onde T é um intervalo de $\mathbb{R}$ e tal que $E\left[|X_t|^p\right] < \infty$, diz-se contínuo em média de ordem p, se para qualquer $t \in T$, temos*

$$\lim_{s \to t} E\left[|X_s - X_t|^p\right] = 0.$$

A continuidade em média de ordem p implica a continuidade em probabilidade. A continuidade em probabilidade (ou em média de ordem p) não implica a continuidade das trajectórias do processo.

Exemplo 2.17 *O processo de Poisson $N = \{N_t, t \geq 0\}$ com intensidade λ é um processo com trajectórias descontínuas. No entanto, é um processo contínuo em média quadrática ou de ordem 2 (recorde que $N_t - N_s \sim Poi(\lambda(t-s))$), pois*

$$\lim_{s \to t} E\left[|N_t - N_s|^2\right] = \lim_{s \to t}\left[\lambda(t-s) + (\lambda(t-s))^2\right] = 0.$$

Para provar que um processo estocástico tem trajectórias contínuas, uma ferramenta teórica muito útil é o critério de continuidade de Kolmogorov que se apresenta a seguir.

Teorema 2.18 *(Critério de continuidade de Kolmogorov): Seja $X = \{X_t; t \in T\}$ um processo estocástico, onde T é um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, e suponha que existem $p > 0$ e $\alpha > 0$ tais que*

$$E\left[|X_t - X_s|^p\right] \leq C\,|t-s|^{1+\alpha}. \tag{2.1}$$

Então existe uma versão de X com trajectórias contínuas.

Mais precisamente, a Eq. (2.1) implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma v.a. G_ε tal que (com probabilidade 1)

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \leq G_\varepsilon(\omega)\,|t-s|^{\frac{1+\alpha}{p} - \varepsilon} \tag{2.2}$$

e $E\left[G_\varepsilon^p\right] < \infty$. Ou seja, X tem trajectórias Hölder contínuas de ordem β para todo $\beta < \frac{1+\alpha}{p}$.

Para uma demonstração deste teorema, recomenda-se a consulta de [5], págs. 53-54.

2.2 Esperança condicional

Consideremos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e sejam A e B dois acontecimentos com A,$B \in \mathcal{F}$ e $P(B) > 0$. A probalidade condicional de A dado B pode-se definir por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{2.3}$$

A aplicação $A \to P(A|B)$ define uma medida de probabilidade na σ-álgebra $\mathcal{F}$. O valor esperado condicional ou a esperança condicional da v.a. X (integrável) dado B, pode calcular-se usando a fórmula

$$E(X|B) = \frac{E[X\mathbf{1}_B]}{P(B)}. \tag{2.4}$$

Exemplo 2.19 *Seja X uma v.a. uniforme com valores em $(0,1]$. Seja $A = \left(0, \frac{1}{4}\right]$. Calculemos $E[X]$ e $E[X|A]$.*

$$E[X] = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$
$$E[X|A] = \frac{E(X\mathbf{1}_A)}{P(A)} = \frac{\int_0^{1/4} xdx}{1/4} = \frac{1}{8}.$$

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade e seja $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ uma σ-álgebra.

Definição 2.20 *A esperança condicional da variável aleatória integrável X dado $\mathcal{B}$ (ou $E(X|\mathcal{B})$) é uma variável aleatória integrável Z tal que*

1. *Z é $\mathcal{B}$-mensurável.*
2. *Para todo $A \in \mathcal{B}$ temos*

$$E(Z\mathbf{1}_A) = E(X\mathbf{1}_A). \tag{2.5}$$

Se X for integrável então $Z = E(X|\mathcal{B})$ existe e é única (quase certamente).

Definição 2.21 *(σ-álgebra gerada): Seja $\mathcal{C}$ uma classe de subconjuntos de Ω. Então, a menor σ-álgebra a conter $\mathcal{C}$ representa-se por $\sigma(\mathcal{C})$ e diz-se a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$.*

Definição 2.22 *(σ-álgebra gerada por X): Seja X uma variável aleatória. Então a σ-álgebra $\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ diz-se a σ-álgebra gerada por X.*

Apresentam-se a seguir as propriedades essenciais da esperança condicional.

Proposição 2.23 *Sejam X, Y e Z variáveis aleatórias integráveis, $\mathcal{B}$ uma σ-algebra e $a, b \in \mathbb{R}$. Então, temos as seguintes propriedades:*

1. $$E(aX + bY|\mathcal{B}) = aE(X|\mathcal{B}) + bE(Y|\mathcal{B}). \tag{2.6}$$

2. $$E\left(E(X|\mathcal{B})\right) = E\left(X\right). \tag{2.7}$$

3. Se X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ são independentes então:
$$E(X|\mathcal{B}) = E\left(X\right) \tag{2.8}$$

4. Se X é $\mathcal{B}$-mensurável (ou se $\sigma\left(X\right) \subset \mathcal{B}$) então:
$$E(X|\mathcal{B}) = X. \tag{2.9}$$

5. Se Y é $\mathcal{B}$-mensurável (ou se $\sigma\left(X\right) \subset \mathcal{B}$) então
$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}) \tag{2.10}$$

6. Dadas duas σ-álgebras $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ então
$$E(E\left(X|\mathcal{B}\right)|\mathcal{C}) = E(E\left(X|\mathcal{C}\right)|\mathcal{B}) = E(X|\mathcal{C}) \tag{2.11}$$

7. Considere duas v.a. X e Z tais que Z é $\mathcal{B}$-mensurável e X é independente de $\mathcal{B}$. Seja $h(x, z)$ uma função mensurável tal que $h(X, Z)$ é uma v.a. integrável. Então
$$E\left(h\left(X, Z\right)|\mathcal{B}\right) = E\left(h\left(X, z\right)\right)|_{z=Z}. \tag{2.12}$$
Nota: primeiro calcula-se $E\left(h\left(X, z\right)\right)$ para qualquer valor z fixo da v.a. Z e depois substitui-se z por Z.

Proposição 2.24 *(Desigualdade de Jensen): Seja X uma variável aleatória integrável e $\mathcal{B}$ uma σ-algebra. Se φ é uma função convexa tal que $E\left[|\varphi\left(X\right)|\right] < \infty$ então*
$$\varphi\left(E(X|\mathcal{B})\right) \leq E(\varphi\left(X\right)|\mathcal{B}). \tag{2.13}$$

Um caso particular da desigualdade de Jensen é obtido, considerando $\varphi(x) = |x|^p$. Se $E(|X|^p) < \infty$, $p \geq 1$, então

$$|E(X|\mathcal{B})|^p \leq E(|X|^p\,|\mathcal{B}).$$

Como consequência, se $p \geq 1$,

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^p\right] \leq E(|X|^p). \tag{2.14}$$

O conjunto de todas as variáveis aleatórias de quadrado integrável - $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ - é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\langle X, Y \rangle = E\left[XY\right].$$

O espaço $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ é um subespaço de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dada uma variável aleatória $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ temos que $E(X|\mathcal{B})$ é a projecção ortogonal de X no subespaço $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ e minimiza a distância em média quadrática de X a $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ no sentido em que

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X - Y)^2\right] \tag{2.15}$$

Exercício 2.25 *Prove que se X e a σ-álgebra $\mathcal{B}$ são independentes então $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$*

Solução 2.26 *Se X e $\mathbf{1}_A$ são independentes então se $A \in \mathcal{B}$, temos que*

$$E\left[X\mathbf{1}_A\right] = E\left[X\right]E\left[\mathbf{1}_A\right] = E\left[E\left[X\right]\mathbf{1}_A\right]$$

e, por definição de esperança condicionada, $E(X|\mathcal{B}) = E(X)$.

Exercício 2.27 *Prove que se Y é $\mathcal{B}$-mensurável então*

$$E(YX|\mathcal{B}) = YE(X|\mathcal{B}).$$

Solução 2.28 *Se $Y = \mathbf{1}_A$ e $A, B \in \mathcal{B}$, temos, por definição de esperança condicionada,*

$$\begin{aligned} E\left[\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B})\mathbf{1}_B\right] &= E\left[\mathbf{1}_{A\cap B}E(X|\mathcal{B})\right] \\ &= E\left[X\mathbf{1}_{A\cap B}\right] = E\left[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_A X\right]. \end{aligned}$$

Logo, $\mathbf{1}_A E(X|\mathcal{B}) = E\left[\mathbf{1}_A X|\mathcal{B}\right]$. Da mesma forma, obtemos o resultado se $Y = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{1}_{A_j}$ (função em escada $\mathcal{B}$-mensurável). O resultado no caso geral prova-se aproximando Y por uma sucessão de funções em escada $\mathcal{B}$-mensuráveis.

Exemplo 2.29 *Dada a variável aleatória $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, vamos mostrar que $E(X|\mathcal{B})$ é a projecção ortogonal de X no subespaço $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ e que*

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X - Y)^2\right]$$

(1) $E(X|\mathcal{B}) \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$, pois é $\mathcal{B}$-mensurável e pela eq. (2.14) temos que

$$E\left[|E(X|\mathcal{B})|^2\right] \leq E(|X|^2) < \infty.$$

(2) Se $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$ temos, pelas propriedades 2 e 5 da esperança condicional,

$$\begin{aligned} E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))\, Z\right] &= E\left[XZ\right] - E\left[E(X|\mathcal{B})Z\right] \\ &= E\left[XZ\right] - E\left[E(XZ|\mathcal{B})\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e portanto $(X - E(X|\mathcal{B}))$ é ortogonal a $L^2(\Omega, \mathcal{B}, P)$.

(3) Como

$$E\left[(X - Y)^2\right] = E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] + E\left[(E(X|\mathcal{B}) - Y)^2\right]$$

temos que $E\left[(X - Y)^2\right] \geq E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right]$ e portanto

$$E\left[(X - E(X|\mathcal{B}))^2\right] = \min_{Y \in L^2(\Omega,\mathcal{B},P)} E\left[(X - Y)^2\right].$$

Exercício 2.30 *Prove as propriedades 1,2, 4 e 6 da esperança condicional (Proposição 2.23)*

2.3 Martingalas em tempo discreto

O conceito de martingala é um dos mais fecundos em análise estocástica. Para definir martingala é necessário definir previamente o que é uma filtração. Considere-se o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 2.31 *Uma sucessão de σ-álgebras $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ tal que*

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}$$

diz-se uma filtração.

Uma filtração pode ser interpretada como representando o fluxo de informação gerado por uma experiência aleatória ou por um processo estocástico.

Definição 2.32 *Um processo estocástico $M = \{M_n; n \geq 0\}$ em tempo discreto diz-se uma martingala relativamente à filtração $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ se:*

1. *Para cada n, M_n é uma v.a. $\mathcal{F}_n$-mensurável (i.e., M é um processo estocástico adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$).*
2. *Para cada n, $E[|M_n|] < \infty$.*
3. *Para cada n, temos*
$$E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] = M_n. \tag{2.16}$$

O processo estocástico $M = \{M_n; n \geq 0\}$ diz-se uma supermartingala (respectivamente submartingala) se verifica as condições 1 e 2 da definição anterior e se a condição 3 é substituída por (3') $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq M_n$ (resp. (3") $E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq M_n$).

A partir da condição (3) (ou eq. (2.16))é fácil mostrar que

$$E[M_n] = E[M_0]$$

para todo $n \geq 1$. Ou seja, o valor esperado de uma martingala é constante no tempo.

A condição (3) - eq. (2.16) - é equivalente a

$$E[\Delta M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0.$$

para todo o $n \geq 1$, com $\Delta M_n := M_n - M_{n-1}$.

A condição de martingala - eq. (2.16) - pode interpretar-se da seguinte forma: dada a informação $\mathcal{F}_n$, M_n é a melhor estimativa para M_{n+1}.

Exercício 2.33 *Prove que se o processo $M = \{M_n; n \geq 0\}$ é uma martingala, então*
$$E[M_n] = E[M_0], \quad \forall n \geq 1.$$

Exemplo 2.34 *(passeio aleatório): Seja $\{Z_n; n \geq 0\}$ um sucessão de variáveis aleatórias independentes, integráveis e com valor esperado nulo. Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ definido por*

$$M_n = Z_0 + Z_1 + \cdots + Z_n.$$

O processo M é um passeio aleatório. Considere a filtração natural gerada por $\{Z_n; n \geq 0\}$, i.e.,

$$\mathcal{F}_n := \sigma\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_n\}.$$

Como $M_0, M_1, \ldots, M_n$ e $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ contêm a mesma informação, geram a mesma σ-álgebra $\mathcal{F}_n$. Provemos que M é uma martingala.

1. *M é adaptado à filtração $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ pois M_n é $\mathcal{F}_n$-mensurável, já que $\mathcal{F}_n$ é gerada também por M_n.*

2. *$E[|M_n|] < \infty$, porque todas as v.a. Z_n são integráveis (i.e. $E[|Z_n|] < \infty$ para todo o n).*

Exemplo 2.35 *Pelas propriedades básicas da esperança condicionada:*

$$
\begin{aligned}
E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[M_n + Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= M_n + E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= M_n + E[Z_{n+1}] \\
&= M_n.
\end{aligned}
$$

Note-se que uma σ-álgebra $\sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ gerada pelas v.a. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ contém toda a informação essencial sobre a estrutura do vector aleatório $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (como aplicação de $\omega \in \Omega$). Qualquer processo que seja martingala relativamente a uma filtração $\mathcal{G}$, também será martingala relativamente à filtração gerada pelo próprio processo (filtração mais pequena).

Lema 2.36 *Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ uma martingala relativamente à filtração $\{\mathcal{G}_n, n \geq 0\}$ e $\mathcal{F}_n = \sigma\{M_0, M_1, \ldots, M_n\} \subset \mathcal{G}_n$ a filtração natural gerada pelo processo M. Então M é uma martingala relativamente a $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$.*

Proof. Pela propriedade 6 da esperança condicionada e pela propriedade de martingala:

$$
\begin{aligned}
E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[E[M_{n+1}|\mathcal{G}_n]|\mathcal{F}_n] \\
&= E[M_n|\mathcal{F}_n] \\
&= M_n.
\end{aligned}
$$

■

Proposição 2.37

1. *Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala. Então, para $m \geq n$, temos*

$$E[M_m|\mathcal{F}_n] = M_n.$$

2. *$\{M_n; n \geq 0\}$ é submartingala se e só se $\{-M_n; n \geq 0\}$ é supermartingala.*

3. *Se $\{M_n; n \geq 0\}$ é martingala e φ é função convexa tal que $E[|\varphi(M_n)|] < \infty \ \ \forall n \geq 0$, então $\{\varphi(M_n), n \geq 0\}$ é uma submartingala.*

A propriedade 3 é uma consequência da desigualdade de Jensen e tem como corolário: se $\{M_n; n \geq 0\}$ e $E[|M_n|^p] < \infty \quad \forall n \geq 0$ e algum $p \geq 1$, então $\{|M_n|^p, n \geq 0\}$ é submartingala.

Exercício 2.38 *Seja $M = \{M_n; n \geq 0\}$ uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala. Prove que se $m \geq n$ então $E[M_m|\mathcal{F}_n] = M_n$.*

2.4 A transformada de martingala

Seja $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ uma filtração dada num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definição 2.39 *O processo estocástico $\{H_n, n \geq 1\}$ diz-se previsível se H_n é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável (i.e., se H_n é "conhecida"no instante $n-1$).*

Definição 2.40 *Dada uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala $M = \{M_n; n \geq 0\}$ e um processo previsível $\{H_n, n \geq 1\}$, o processo $\{(H \cdot M)_n, n \geq 1\}$, definido por*

$$(H \cdot M)_n = M_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$$

diz-se a transformada de martingala de M por $\{H_n, n \geq 1\}$.

A transformada de martingala de uma sucessão previsível é a versão discreta do integral estocástico, ou seja:

$$(H \cdot M)_n - M_0 = \sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j \approx \int_0^n H_s dM_s.$$

Proposição 2.41 *Se $M = \{M_n; n \geq 0\}$ é uma martingala e $\{H_n, n \geq 0\}$ é um processo previsível com variáveis aleatórias limitadas, então a transformada de martingala $\{(H \cdot M)_n, n \geq 1\}$ é uma martingala.*

Proof. 1. $(H \cdot M)_n$ é $\{\mathcal{F}_n\}$-mensurável pois $\sum_{j=1}^{n} H_j \Delta M_j$ é $\mathcal{F}_n$- mensurável.

2. $(H \cdot M)_n$ é integrável, pois as v.a. M_n são integráveis e as v.a. H_n são limitadas.

3. Pelas propriedades da esperança condicionada:

$$\begin{aligned} E\left[(H \cdot M)_{n+1} - (H \cdot M)_n |\mathcal{F}_n\right] &= E\left[H_{n+1}\left(M_{n+1} - M_n\right)|\mathcal{F}_n\right] \\ &= H_{n+1} E\left[M_{n+1} - M_n|\mathcal{F}_n\right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Considere-se agora o seguinte jogo com sistema de apostas H_n:

- a quantia apostada por jogador na jogada n é H_n;
- $\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$ representa os ganhos na jogada n;
- M_n representa a fortuna acumulada no instante n;
- $(H \cdot M)_n$ representa a fortuna acumulada do jogador se ele usar o sistema de apostas $\{H_n, n \geq 1\}$.

Se $\{M_n; n \geq 0\}$ é uma martingala o jogo diz-se justo e então $(H \cdot M)_n$ também é martingala, isto é, o jogo permanece justo independentemente do sistema de apostas utilizado, desde que $\{H_n, n \geq 0\}$ verifique as condições da Proposição 2.41.

Exemplo 2.42 *(apostas a dobrar): Suponha que*

$$M_n = M_0 + Z_1 + \cdots + Z_n,$$

onde $\{Z_n; n \geq 1\}$ são v.a. indep.que representam a cara $(+1)$ ou a coroa (-1) de uma moeda. Então $P(Z_i = 1) = P(Z_i = -1) = \frac{1}{2}$. Suponha que um jogador começa por apostar um Euro e dobra a sua aposta sempre que sai coroa (-1) (dobra a aposta sempre que perde) e termina o jogo quando sai cara $(+1)$ (quando ganha). Ou seja, o sistema de apostas é

$$\begin{aligned} &H_1 = 1, \\ &H_n = 2H_{n-1} \quad \text{se } Z_{n-1} = -1, \\ &H_n = 0 \quad \text{se } Z_{n-1} = +1. \end{aligned}$$

Se o jogador perde k jogadas e vence na jogada $k+1$, obtém

$$(H \cdot M)_k = -1 - 2 - 4 - \cdots - 2^{k-1} + 2^k = 1.$$

Parece uma estratégia sempre vencedora, mas atenção que para ser sempre vencedora (com probabilidade 1) requer fundos ilimitados (estratégia de apostas não limitada) e tempo ilimitado. De facto, neste caso a Proposição 2.41 não se pode aplicar porque as variáveis H_n (do sistema de apostas) não são limitadas.

Exemplo 2.43 *(aplicação financeira) Sejam $S_n := \{S_n^0, S_n^1, n \geq 1\}$ processos adaptados que representam os preços de dois activos financeiros. Seja*

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

o preço do activo sem risco (obrigação), onde r é a taxa de juro (o processo S_n^0 é determinístico). Uma carteira é o processo $\phi_n := \{\phi_n^0, \phi_n^1, n \geq 1\}$, que representa o número de unidades dos activos. O valor da carteira no período n é

$$V_n = \phi_n^0 S_n^0 + \phi_n^1 S_n^1 = \phi_n \cdot S_n$$

A carteira diz-se autofinanciada se, para qualquer n,

$$V_n = V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \Delta S_j.$$

Esta condição é equivalente a ter, para qualquer n,

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

Defina os preços descontados

$$\widetilde{S}_n = (1+r)^{-n} S_n = \left(1, (1+r)^{-n} S_n^1\right).$$

É claro que temos

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_n &= (1+r)^{-n} V_n = \phi_n \cdot \widetilde{S}_n, \\ \phi_n \cdot \widetilde{S}_n &= \phi_{n+1} \cdot \widetilde{S}_n, \\ \widetilde{V}_n &= V_0 + \sum_{j=1}^{n} \phi_j \Delta \widetilde{S}_j \end{aligned}$$

O processo $\widetilde{V}_n = \left(\phi_n^1 \cdot \widetilde{S}^1\right)_n$ é a transformada martingala de $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ pelo processo previsível $\{\phi_n^1\}$. Se $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ for uma martingala e se $\{\phi_n^1\}$ for uma sucessão limitada, então, pela Proposição 2.41, o processo $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ também será uma martingala.

Exemplo 2.44 *(modelo binomial) Uma probabilidade Q equivalente a P diz-se uma probabilidade neutra face ao risco (risk neutral probability measure) se no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, o processo $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ for uma $\{\mathcal{F}_n\}$-martingala. Nesse caso, se $\{\phi_n^1\}$ for limitada, $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ também será uma martingala, como se viu no exemplo anterior.*

No modelo binomial, assume-se que as v.a.

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

são independentes e assumem os valores $1+a$ *e* $1+b$ *com probabilidades* p *e* $1-p$*, respectivamente, com* $a < r < b$*. Determinemos* p *(ou seja a medida de probabilidade* Q*) de forma a que* $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ *seja martingala.*

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] &= (1+r)^{-n-1} E\left[S_n T_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \widetilde{S}_n (1+r)^{-1} E\left[T_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] \\ &= \widetilde{S}_n (1+r)^{-1} E\left[T_{n+1}\right] \end{aligned}$$

Logo, $\left\{\widetilde{S}_n^1\right\}$ *é martingala se* $E\left[T_{n+1}\right] = (1+r)$*, ou seja se*

$$E\left[T_{n+1}\right] = p(1+a) + (1-p)(1+b) = 1+r$$

e portanto

$$p = \frac{b-r}{b-a}.$$

Considere agora uma v.a. H *que é* $\{\mathcal{F}_N\}$*-mensurável e que representa o payoff de um derivado sobre o activo 1 e com maturidade no instante* N*. Por exemplo, uma opção de compra Europeia ("call option") com preço de exercício* K *tem payoff* $H = (S_N - K)^+$*. O derivado diz-se replicável se existir uma carteira auto-financiada tal que*

$$V_N = H.$$

O preço do derivado será o valor desta carteira. Como $\left\{\widetilde{V}_n\right\}$ *é uma martingala no espaço de probabilidade, temos*

$$\begin{aligned} V_n = (1+r)^n \widetilde{V}_n &= (1+r)^n E_Q\left[\widetilde{V}_N|\mathcal{F}_n\right] \\ &= (1+r)^{-(N-n)} E_Q\left[H|\mathcal{F}_n\right] \end{aligned}$$

Se $n=0$*, temos que* $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$ *e*

$$V_0 = (1+r)^{-N} E_Q[H].$$

2.5 Martingalas em tempo contínuo

As martingalas em tempo contínuo definem-se de forma análoga às martingalas em tempo discreto e a maioria das propriedades continuam a ser válidas em tempo contínuo.

Definição 2.45 *Considere-se o espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Uma família de* σ*-álgebras* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *tal que*

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t, \quad 0 \leq s \leq t.$$

diz-se uma filtração.

Seja $\mathcal{F}_t^X$ a σ-álgebra gerada pelo processo X no intervalo $[0, t]$, i.e. $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$. Então $\mathcal{F}_t^X$ pode interpretar-se como a informação gerada pelo processo X no intervalo $[0, t]$. Dizer que $A \in \mathcal{F}_t^X$ significa que é possível decidir se o acontecimento A ocorreu ou não, baseando-nos nas observações das trajectórias do processo X em $[0, t]$.

Exemplo 2.46 *Se* $A = \{\omega : X(5) > 1\}$ *então* $A \in \mathcal{F}_5^X$ *mas* $A \notin \mathcal{F}_4^X$.

Definição 2.47 *Um processo estocástico* $M = \{M_t; t \geq 0\}$ *diz-se uma martingala relativamente à filtração* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ *se:*

1. *Para cada* $t \geq 0$, M_t *é uma v.a.* $\mathcal{F}_t$*-mensurável (i.e.,* M *é um p.e. adaptado à filtração* $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$*).*

2. *Para cada* $t \geq 0$, $E[|M_t|] < \infty$.

3. *Para cada* $s \leq t$*, temos*

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s.$$

A condição (3) é equivalente a $E[M_t - M_s | \mathcal{F}_s] = 0$. Se $t \in [0, T]$ então, pela propriedade de martingala, temos que $M_t = E[M_T | \mathcal{F}_t]$. Tal como no caso discreto, a condição (3) implica que $E[M_t] = E[M_0]$ para todo t.

As definições de supermartingala e submartingala são análogas às definições para o tempo discreto.

Temos também a seguinte generalização da desigualdade de Chebyshev (análoga à versão em tempo discreto).

Teorema 2.48 *(Desigualdade maximal (ou de martingala) de Doob): Se* $M = \{M_t; t \geq 0\}$ *é uma martingala com trajectórias contínuas então, para todo* $p \geq 1$, $T \geq 0$ *e* $\lambda > 0$,

$$P\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^p} [E|M_T|^p]$$

Para uma demonstração deste teorema na versão discreta (baseada no teorema da paragem opcional) ver [9]. Para uma análise mais detalhada das martingalas e das suas propriedades, recomenda-se a consulta das referências [2] e [5].

Capítulo 3

Movimento Browniano

A terminologia "movimento Browniano"deve-se ao facto do botânico Robert Brown ter sido o primeiro a observar ao miscroscópio, em 1827, o movimento físico errático de grãos de pólen suspensos em gotas de água. Este movimento é provocado pelos choques moleculares e é um exemplo físico do movimento que se veio a chamar movimento Browniano. Em 1900, Louis Bachelier, na sua tese "Théorie de la spéculation"usou o movimento Browniano como modelo para a evolução dos preços de activos financeiros. Mais tarde, Albert Einstein, num dos seus famosos artigos de 1905, usou o movimento Browniano para confirmar indirectamente a existência de átomos e moléculas e para determinar o tamanho dos átomos e a sua massa. A demonstração de que o movimento Browniano, enquanto processo estocástico, existia e estava rigorosamente definido só foi feita em 1923 por Norbert Wiener.

Definição 3.1 *Um p.e.* $B = \{B_t; t \geq 0\}$ *diz-se um movimento Browniano se verifica seguintes condições seguintes*

1. $B_0 = 0$.
2. *B tem incrementos independentes.*
3. *Se* $s < t$, $B_t - B_s$ *é uma v.a. com distribuição* $N(0, t - s)$.
4. *O processo B tem trajectórias contínuas.*

O movimento Browniano é um processo Gaussiano. De facto, as distribuições de dimensão finita de B, i.e. a distribuição dos vectores $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$

é Gaussiana. Da condição 3 da definição, resulta imediatamente que $B_t \sim N(0,t)$ e

$$E[B_t] = 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.1}$$
$$E\left[B_t^2\right] = t, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.2}$$

Proposição 3.2 *Seja $B = \{B_t; t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Então a função de covariância de B é*

$$c_B(s,t) = E[B_s B_t] = \min(s,t). \tag{3.3}$$

Proof. Se $s \leq t$, pelas propriedades que definem o movimento Browniano, temos que

$$\begin{aligned} E[B_s B_t] &= E\left[B_s(B_t - B_s) + B_s^2\right] \\ &= E[B_s(B_t - B_s)] + E\left[B_s^2\right] \\ &= E[B_s]\,E[B_t - B_s] + s = s, \end{aligned}$$

onde se usou a independência dos incrementos e a eq. (3.1). ■

Proposição 3.3 *Um p.e. que verifique as condições 1,2 e 3. da Definição 3.1 tem necessariamente uma versão com trajectórias contínuas.*

Proof. Como $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$, é possível mostrar que

$$E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}(t-s)^k. \tag{3.4}$$

Para provar este resultado pode-se usar integração por partes e o método de indução em k (ver [10]). Com $k = 2$ obtemos

$$E\left[(B_t - B_s)^4\right] = 3(t-s)^2.$$

Então, pelo critério de continuidade de Kolmogorov (Teorema 2.18), existe uma versão de B com trajectórias contínuas. ■

Para definir o movimento Browniano poderíamos ter apenas exigido as primeiras 3 condições da Definição 3.1, e pela Proposição anterior, existiria uma versão que teria trajectórias contínuas.

Pode demonstrar-se que existe um p.e. que cumpre as condições 1,2,3. Para tal pode usar-se o teorema de existência de Kolmogorov (ver [10]). Então, pela Proposição anterior, existe um processo estocástico que verifica as 4 condições da definição. O movimento Browniano existe portanto como objecto matemático rigorosamente definido.

Na definição de movimento Browniano, o espaço de probabilidade é arbitrário. Contudo, é possível descrever a estrutura deste espaço, considerando a aplicação:

$$\begin{aligned} \Omega &\to C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right) \\ \omega &\to B_{.}\left(\omega\right) \end{aligned}$$

que a cada elemento ω faz corresponder uma função contínua com valores em $\mathbb{R}$ (a trajectória). O espaço de probabilidade é o espaço de funções continuas $C\left([0,\infty),\mathbb{R}\right)$ equipado com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}_C$ e com probabilidade induzida pela aplicação anterior: $P\circ B^{-1}$. Esta probabilidade diz-se a medida de Wiener.

Como corolário ao critério da continuidade de Kolmogorov e à fórmula

$$E\left[\left(B_t - B_s\right)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}\left(t-s\right)^k, \tag{3.5}$$

temos que

$$\left|B_t\left(\omega\right) - B_s\left(\omega\right)\right| \leq G_\varepsilon\left(\omega\right)\left|t-s\right|^{\frac{1+\alpha}{p}-\varepsilon} \leq G_\varepsilon\left(\omega\right)\left|t-s\right|^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

para qualquer $\varepsilon > 0$ e onde $G_\varepsilon\left(\omega\right)$ é uma v.a.. Daqui resulta que as trajectórias do movimento Browniano são Hölder contínuas de ordem $\delta = \frac{1}{2} - \varepsilon$. Ou seja, informalmente temos, para $\Delta t > 0$,

$$\left|B_{t+\Delta t} - B_t\right| \approx \left(\Delta t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Por outro lado, já se sabe que

$$E\left[\left(B_{t+\Delta t} - B_t\right)^2\right] = \Delta t.$$

Considerando o intervalo $[0,t]$ e partições do intervalo tal que $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$, com $t_j = \frac{tj}{n}$, podemos então deduzir, de forma heuristica, que:

- B tem variação total infinita: $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta B_k\right| \approx n\left(\frac{t}{n}\right)^{1/2} \to \infty$ quando $n \to \infty$.
- B tem variação quadrática finita: $\sum_{k=1}^{n}\left|\Delta B_k\right|^2 = n\left(\frac{t}{n}\right) = t$.

Sobre a irregularidade das trajectórias do movimento Browniano, apresenta-se a seguir um importante resultado.

Proposição 3.4 *As trajectórias do movimento Browniano não são diferenciáveis em nenhum ponto (quase certamente).*

Provaremos apenas que dado um ponto t, a derivada da trajectória não existe nesses ponto. Temos que

$$\frac{B_{t+\Delta t}-B_t}{\Delta t} \approx \frac{\sqrt{\Delta t}Z}{\Delta t} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta t}},$$

onde $Z \sim N(0,1)$. Então, esta razão ou taxa tende para ∞ quando $\Delta t \to 0$ em probabilidade, pois $P\left(\frac{Z}{\sqrt{\Delta t}} > K\right) \to 1$ para qualquer K, quando $\Delta t \to 0$. Logo, a derivada não existe no ponto t.

Proposição 3.5 *(auto-semelhança) Se $B = \{B_t; t \geq 0\}$ é um mov. Browniano então, para qualquer $a > 0$, o processo $\left\{a^{-1/2}B_{at}; t \geq 0\right\}$ tb. é um mov. Browniano.*

Exercício 3.6 *Prove a Proposição 3.5*

Apresentam-se agora alguns processos que se definem a partir do movimento Browniano $B = \{B_t; t \geq 0\}$.

- Movimento Browniano com deriva (ou "drift"):

  $$Y_t = \mu t + \sigma B_t,$$

  com $\sigma > 0$ e μ constantes. Claramente, este é um processo Gaussiano com $E[Y_t] = \mu t$ e $cov(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$.

- Movimento Browniano geométrico (modelo proposto por Samuelson, e mais tarde por Black, Scholes e Merton para a descrição dos preços de activos financeiros):

  $$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t},$$

  com $\sigma > 0$ e μ constantes. A distribuição de X é lognormal. Ou seja, $\ln(X_t)$ tem distribuição normal.

- Ponte Browniana:

  $$Z_t = B_t - tB_1, \quad t \in [0,1].$$

  Note que $Z_1 = Z_0 = 0$. Este processo é Gaussiano com $E[Z_t] = 0$ e $cov(s,t) = E[Z_s Z_t] = \min(s,t) - st$.

Defina-se a filtração gerada por B

$$\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_s, s \leq t\}.$$

Considera-se que $\mathcal{F}_t^B$ também contém os conjuntos de probabilidade 0 (considera-se que $N \in \mathcal{F}_0$ sempre que $P(N) = 0$). Algumas consequências da inclusão dos conjuntos de probabilidade 0 na filtração:

1. Qualquer versão de um processo adaptado também é adaptado.

2. A filtração é contínua pela direita, i.e.

$$\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^B = \mathcal{F}_t^B.$$

Exemplo 3.7 *Se B é um movimento Browniano então o processo $X_t = \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ é adaptado à filtração gerada por B mas o processo $Y_t = \sup_{0 \leq s \leq t+1} B_s$ já não é.*

Proposição 3.8 *Se $B = \{B_t; t \geq 0\}$ é um movimento Browniano e $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ é a filtração gerada por B, então os seguintes processos são $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$-martingalas:*

1. B_t.

2. $B_t^2 - t$.

3. $\exp\left(aB_t - \frac{a^2 t}{2}\right)$.

Proof. 1. Claramente B_t é $\mathcal{F}_t^B$-mensurável e integrável. Além disso, como $B_t - B_s$ é independente de $\mathcal{F}_s^B$ (pela independência dos incrementos de B), temos

$$E\left[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B\right] = E\left[B_t - B_s\right] = 0.$$

2. O processo $B_t^2 - t$ é $\mathcal{F}_t^B$-mensurável e integrável. Pelas propriedades de B e da esperança condicional

$$\begin{aligned} E\left[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s^B\right] &= E\left[(B_t - B_s + B_s)^2 | \mathcal{F}_s^B\right] - t \\ &= E\left[(B_t - B_s)^2\right] + 2B_s E\left[B_t - B_s | \mathcal{F}_s^B\right] + B_s^2 - t \\ &= t - s + B_s^2 - t = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

■

Exercício 3.9 *Seja $B = \{B_t; t \geq 0\}$ um movimento Browniano e $\left\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\right\}$ a filtração gerada por B. Prove que o processo $X_t = \exp\left(aB_t - \frac{a^2 t}{2}\right)$ é uma martingala.*

Os resultados sobre a variação total e a variação quadrática do movimento Browniano foram deduzidos de forma heurística. Veremos agora como provar rigorosamente estes resultados. Fixemos um intervalo $[0,t]$ e fixemos uma partição π deste intervalo, com

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t.$$

A norma da partição é definida por

$$|\pi| = \max_k \Delta t_k,$$

onde $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ e seja $\Delta B_k = B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$.

Proposição 3.10 *O movimento Browniano B tem variação quadrática finita no intervalo $[0,t]$ (e igual a t), no sentido em que*

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] \longrightarrow 0,$$

quando $|\pi| \to 0$.

Proof. Usando a independência dos incrementos, o facto de $E\left[(\Delta B_k)^2\right] = \Delta t_k$ e a fórmula $E\left[(B_t - B_s)^{2j}\right] = \frac{(2j)!}{2^j \cdot j!}(t-s)^j$, temos

$$\begin{aligned} E\left[\left(\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 - t\right)^2\right] &= E\left[\sum_{k=1}^{n} \left[(\Delta B_k)^2 - \Delta t_k\right]^2\right] \\ \sum_{j=1}^{n} &\left[3(\Delta t_k)^2 - 2(\Delta t_k)^2 + (\Delta t_k)^2\right] \\ &= 2\sum_{j=1}^{n} (\Delta t_k)^2 \leq 2t\,|\pi| \underset{|\pi|\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 3.11 *O movimento Browniano B tem variação total infinita no intervalo $[0,t]$, no sentido em que $V = \sup_{\pi} \sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k| = \infty$ com probabilidade 1.*

Proof. Usando a continuidade das trajectórias do movimento Browniano, temos

$$\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2 \leq \sup_k |\Delta B_k| \sum_{k=1}^{n} |\Delta B_k| \leq V \sup_k |\Delta B_k| \underset{|\pi| \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

se $V < \infty$. Mas isto contradiz o facto de $\sum_{k=1}^{n} (\Delta B_k)^2$ convergir em média quadrática para t. Logo, $V = \infty$. ■

Para uma análise mais detalhada e aprofundada do movimento Browniano, recomenda-se a consulta de [5].

Capítulo 4

O integral de Itô

4.1 Motivação

Seja $B = \{B_t; t \geq 0\}$ um movimento Browniano e consideremos uma equação diferencial "estocástica"do tipo

$$\frac{dX}{dt} = b(t, X_t) + \sigma\left(t, X_t\right) "\frac{dB_t}{dt}",$$

onde $"\frac{dB_t}{dt}"$ é o ruído estocástico. Este processo não existe no sentido clássico, pois B não é diferenciável. A Equação diferencial estocástica anterior pode ser escrita na forma integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + "\int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s"$$

O problema agora é como definir $\int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s$. Ou, de forma mais geral, o problema consiste em definir integrais estocásticos do tipo

$$\int_0^T u_s \mathrm{d}B_s,$$

onde B é um movimento Browniano e u é um processo estocástico adequado.

Uma estratégia que poderia ser seguida para definir estes integrais seria considerar o integral como um integral de Riemann-Stieltjes. Vejamos como se define um integral deste tipo. Considere uma sucessão de partições de $[0, T]$ e uma sucessão de pontos intermédios nessas partições:

$$\begin{aligned} &\tau_n\colon\ 0 = t_0^n < t_1^n < t_2^n < \cdots < t_{k(n)}^n = T \\ &s_n\colon\ t_i^n \leq s_i^n \leq t_{i+1}^n, \quad i = 0, \ldots, k\left(n\right) - 1, \end{aligned}$$

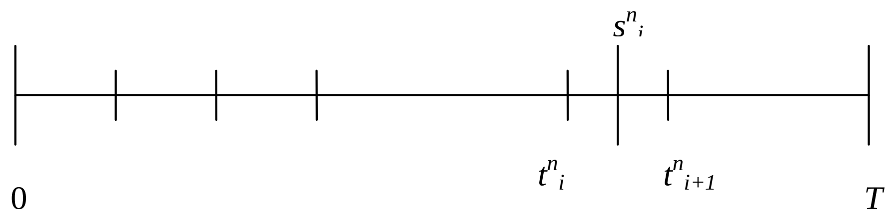


Figura 4.1: Partição de $[0, T]$

tais que $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{i} \left(t_{i+1}^n - t_i^n\right) = 0$.

O integral de Riemann-Stieltjes (R-S) define-se como o limite das somas de Riemann:

$$\int_0^T f dg := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(s_i^n\right) \Delta g_i,$$

onde $\Delta g_i := g(t_{i+1}^n) - g(t_i^n)$, se o limite existir e for independente das sucessões τ_n e s_n.

- O integral de Riemann Stieltjes (R-S) $\int_0^T f dg$ existe se f é contínua e g tem variação total limitada, i.e.

$$\sup_{\tau_n} \sum_i |\Delta g_i| < \infty.$$

- Se f é contínua e g é de classe C^1 então o integral de (R-S) $\int_0^T f dg$ existe e

$$\int_0^T f dg := \int_0^T f(t)\, g'(t) dt,$$

- No caso do movimento Browniano B, é claro que a derivada $B'(t)$ não existe, pelo que não se pode definir o integral trajectorial

$$\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega) \overset{\times}{\neq} \int_0^T u_t(\omega)\, B_t'(\omega)\, dt.$$

Em geral, já sabemos que o movimento Browniano tem variação total não limitada e portanto não se pode definir o integral (R-S) $\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega)$. No entanto, se u tem trajectórias de classe C^1, integrando por partes, o integral trajectorial (R-S) existe e

$$\int_0^T u_t(\omega)\, dB_t(\omega) = u_T(\omega)\, B_T(\omega) - \int_0^T u_t'(\omega)\, B_t(\omega)\, dt.$$

Mas subsiste um problema. Por exemplo, $\int_0^T B_t(\omega)\,dB_t(\omega)$ não existe como integral R-S. É útil considerar processos mais irregulares que processos com trajectória de classe C^1. Como definir o integral estocástico para estes processos? Devemos abandonar a estratégia de definir um integral trajectorial semelhante ao de Riemann-Stieltjes e seguir uma nova estratégia: definir o integral estocástico $\int_0^T u_t dB_t$ através de uma abordagem probabilística.

Considere-se um movimento Browniano $B = \{B_t; t \geq 0\}$ e a filtração $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ gerada pelo movimento Browniano.

Definição 4.1 *Consideraremos processos u da classe $L^2_{a,T}$, que se define como a classe de processos estocásticos $u = \{u_t,\ t \in [0,T]\}$, tais que:*

1. *u é adaptado e mensurável: i.e. u_t é $\mathcal{F}_t$-mensurável para todo $t \in [0,T]$, e a aplicação $(t,\omega) \to u_t(\omega)$, definida em $[0,T]\times\Omega$ é mensurável relativamente à σ-álgebra $\mathcal{B}_{[0,T]} \times \mathcal{F}_T$.*

2. *$E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] < \infty$.*

- A condição 1. é necessária para mostrar que as v.a. do tipo $\int_0^t u_s ds$ são $\mathcal{F}_t$-mensuráveis.

- A condição 2. permite mostrar que u como aplicação das duas variáveis t e ω pertence ao espaço $L^2([0,T]\times\Omega)$ e que (pelo teorema de Fubini)

$$E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] = \int_0^T E\left[u_t^2\right] dt = \int_{[0,T]\times\Omega} u_t^2(\omega)\, dt P(d\omega).$$

4.2 Integral estocástico de processos simples

A estratégia para definir o integral estocástico passa por definir $\int_0^T u_t dB_t$ para $u \in L^2_{a,T}$ como o limite em média quadrática (limite em $L^2(\Omega)$) de integrais de processos simples.

Definição 4.2 *Um processo estocástico u diz-se um processo simples se*

$$u_t = \sum_{j=1}^{n} \phi_j \mathbf{1}_{(t_{j-1},t_j]}(t), \tag{4.1}$$

onde $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, e as v.a. ϕ_j são de quadrado integrável ($E\left[\phi_j^2\right] < \infty$) e $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$-mensuráveis.

Representaremos por $\mathcal{S}$ a classe de todos os processos simples.

Definição 4.3 *Se u é um processo simples da forma (4.1) ($u \in \mathcal{S}$) então definimos o integral estocástico de u relativamente ao movimento Browniano B por*

$$\int_0^T u_t dB_t := \sum_{j=1}^n \phi_j \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \right).$$

Exemplo 4.4 *Considere o processo simples*

$$u_t = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \mathbf{1}_{(t_{j-1}, t_j]} (t).$$

Então

$$\int_0^T u_t dB_t = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}} \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \right).$$

É evidente que, pela propriedade dos incrementos independentes de B, temos

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T u_t dB_t \right] &= \sum_{j=1}^n E\left[B_{t_{j-1}} \left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \right) \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[B_{t_{j-1}} \right] E\left[B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Proposição 4.5 *(Propriedade de isometria). Seja $u \in \mathcal{S}$ um processo simples. Então temos a seguinte propriedade de isometria:*

$$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t \right)^2 \right] = E\left[\int_0^T u_t^2 dt \right]. \tag{4.2}$$

Proof. Com $\Delta B_j := B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$, temos

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t \right)^2 \right] &= E\left[\left(\sum_{j=1}^n \phi_j \Delta B_j \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=1}^n E\left[\phi_j^2 \left(\Delta B_j \right)^2 \right] + 2 \sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j \right]. \end{aligned}$$

Note-se que como $\phi_i \phi_j \Delta B_i$ é $\mathcal{F}_{j-1}$-mensurável e ΔB_j é independente de $\mathcal{F}_{j-1}$, temos

$$\sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i \Delta B_j \right] = \sum_{i<j}^n E\left[\phi_i \phi_j \Delta B_i \right] E\left[\Delta B_j \right] = 0.$$

Por outro lado, como ϕ_j^2 é $\mathcal{F}_{j-1}$-mensurável e ΔB_j é independente de $\mathcal{F}_{j-1}$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} E\left[\phi_j^2 (\Delta B_j)^2\right] &= \sum_{j=1}^{n} E\left[\phi_j^2\right] E\left[(\Delta B_j)^2\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} E\left[\phi_j^2\right] (t_j - t_{j-1}) = \\ &= E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right].\end{aligned}$$

■

Proposição 4.6 *Seja $u \in \mathcal{S}$.*

- *1. Linearidade: Se u,$v \in \mathcal{S}$:*

$$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a \int_0^T u_t dB_t + b \int_0^T v_t dB_t. \tag{4.3}$$

  2. Valor esperado nulo:

$$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0. \tag{4.4}$$

Exercício 4.7 *Prove as propriedades 1. e 2. da proposição anterior.*

4.3 Integral de Itô para processos adaptados

O lema seguinte é fundamental para definir o integral estocástico para processos adaptados.

Lema 4.8 *Se $u \in L^2_{a,T}$ então existe uma sucessão de processos simples $\left\{u^{(n)}\right\} \in \mathcal{S}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0. \tag{4.5}$$

Proof. 1. Suponha que u é um processo contínuo em média quadrática, ou seja:

$$\lim_{s\to t} E\left[|u_t - u_s|^2\right] = 0.$$

Defina-se $t_j^n := \frac{j}{n}T$ e

$$u_t^n = \sum_{j=1}^{n} u_{t_{j-1}^n} \mathbf{1}_{\left(t_{j-1}^n, t_j^n\right]}(t). \tag{4.6}$$

Pelo teorema de Fubini, temos que

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] &= \left[\int_0^T E\left[\left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2\right] dt\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} E\left[\left|u_{t_{j-1}^n} - u_t\right|^2 dt\right] \\ &\leq T \sup_{|t-s| \leq \frac{T}{n}} E\left[|u_s - u_t|^2\right] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Passo 2. Suponha agora que $u \in L_{a,T}^2$ e considere a sucessão de processos $\left\{v^{(n)}\right\}$ definidos por

$$v_t^n = n \int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s ds.$$

Estes processos são contínuos em média quadrática (até são trajectorialmente contínuos) e pertencem à classe $L_{a,T}^2$. Por outro lado, temos que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - v_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0,$$

pois

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left|u_t(\omega) - v_t^{(n)}(\omega)\right|^2 dt = 0.$$

e podemos aplicar o teorema de convergência dominada no espaço $[0,T] \times \Omega$, pois pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e mudando a ordem de integração, obtemos

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T \left|v_t^{(n)}\right|^2 dt\right] &= E\left[n^2 \int_0^T \left|\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s ds\right|^2 dt\right] \\ &\leq nE\left[\int_0^T \left(\int_{t-\frac{1}{n}}^{t} u_s^2 ds\right) dt\right] \\ &= nE\left[\int_0^T u_s^2 \left(\int_s^{s+1/n} dt\right) ds\right] \\ &= E\left[\int_0^T u_s^2 ds\right]. \end{aligned}$$

■

Definição 4.9 *O integral estocástico ou o integral de Itô do processo $u \in L^2_{a,T}$ é definido como o limite (em $L^2(\Omega)$)*

$$\int_0^T u_t dB_t = \lim_{n\to\infty} (L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t, \tag{4.7}$$

onde $\{u^{(n)}\}$ é uma sucessão de processos simples que satisfaz (4.5).

Note-se que o limite (4.7) existe, pois devido à prop. de isometria para processos simples, a sucessão $\left\{\int_0^T u_t^{(n)} dB_t\right\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2(\Omega)$ e portanto é convergente.

Proof.

$$E\left[\left(\int_0^T u_t^{(n)} dB_t - \int_0^T u_t^{(m)} dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right)^2 dt\right]$$
$$\leq 2E\left[\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t\right)^2 dt\right] + 2E\left[\int_0^T \left(u_t - u_t^{(m)}\right)^2 dt\right] \overset{n,m\to\infty}{\to} 0.$$

■

Proposição 4.10 *Suponha-se que $u \in L^2_{a,T}$. Então, as seguintes propriedades são satisfeitas.*

- 1. Isometria:
$$E\left[\left(\int_0^T u_t dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right]. \tag{4.8}$$

  2. Valor esperado nulo:
$$E\left[\int_0^T u_t dB_t\right] = 0 \tag{4.9}$$

  3. Linearidade:
$$\int_0^T (au_t + bv_t)\, dB_t = a\int_0^T u_t dB_t + b\int_0^T v_t dB_t. \tag{4.10}$$

Proof. Estas propriedades verificam-se facilmente para processos $u \in \mathcal{S}$ (processos simples). Logo, passando ao limite, verificam-se também para processos $u \in L^2_{a,T}$. ■

Exemplo 4.11 *Vamos mostrar que*

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2}T.$$

Como o processo $u_t = B_t$ *é contínuo em média quadrática, consideramos a sucessão de aproximação de processos simples (4.6), i.e.*

$$u_t^n = \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n} \mathbf{1}_{\left(t_{j-1}^n, t_j^n\right]}(t),$$

com $t_j^n := \frac{j}{n}T$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T B_t dB_t &= \lim_{n\to\infty} (L^2) \int_0^T u_t^{(n)} dB_t = \\
&= \lim_{n\to\infty} (L^2) \sum_{j=1}^n B_{t_{j-1}^n}\left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (L^2) \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left[\left(B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2\right) - \left(B_{t_j^n} - B_{t_{j-1}^n}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(B_T^2 - T\right),
\end{aligned}$$

onde se usou o facto de $E\left[\left(\sum_{j=1}^n \left(\Delta B_{t_j^n}\right)^2 - T\right)^2\right] \to 0$ *e* $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left(B_{t_j^n}^2 - B_{t_{j-1}^n}^2\right) = \frac{1}{2}B_T^2$.

4.4 Integrais estocásticos indefinidos

Considere-se um processo estocástico $u \in L_{a,T}^2$. Então, para qualquer $t \in [0,T]$, o processo $u\mathbf{1}_{[0,t]}$ também pertence a $L_{a,T}^2$ e podemos definir o integral estocástico indefinido:

$$\int_0^t u_s \mathrm{d}B_s := \int_0^T u_s \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\, \mathrm{d}B_s.$$

O processo estocástico $\left\{\int_0^t u_s \mathrm{d}B_s,\ 0 \le t \le T\right\}$ é o integral estocástico indefinido de u relativamente a B.

Proposição 4.12 *Principais propriedades do integral estocástico indefinido:*

1. Aditividade: Para $a \leq b \leq c$, temos:
$$\int_a^b u_s \mathrm{d}B_s + \int_b^c u_s \mathrm{d}B_s = \int_a^c u_s \mathrm{d}B_s.$$

2. Factorização: Se $a < b$ e $A \in \mathcal{F}_a$, então:
$$\int_a^b \mathbf{1}_A u_s \mathrm{d}B_s = \mathbf{1}_A \int_a^b u_s \mathrm{d}B_s.$$
Esta propriedade permanece válida, substituindo $\mathbf{1}_A$ por qualquer variável aleatória limitada e $\mathcal{F}_a$-mensurável.

3. Propriedade de martingala: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$ é uma martingala relativamente à filtração $\mathcal{F}_t$.

4. Continuidade: Se $u \in L^2_{a,T}$ então o processo integral estocástico indefinido $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$ tem uma versão com trajectórias contínuas.

5. Desigualdade maximal para o integral estocástico indefinido: se $u \in L^2_{a,T}$ e $M_t = \int_0^t u_s \mathrm{d}B_s$, então para qualquer $\lambda > 0$ temos
$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| > \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T u_t^2 \mathrm{d}t\right].$$

Proof. Prova de 3: seja $u^{(n)}$ uma sucessão de processos simples tais que
$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T \left|u_t - u_t^{(n)}\right|^2 dt\right] = 0.$$
Seja $M_n(t) = \int_0^t u_s^{(n)} \mathrm{d}B_s$. e seja ϕ_j o valor de $u^{(n)}$ no intervalo $(t_{j-1}, t_j]$, com $j = 1, \ldots, n$. Se $s \leq t_k \leq t_{m-1} \leq t$, então:
$$\begin{aligned}
&E\left[M_n(t) - M_n(s)\,|\mathcal{F}_s\right] \\
&= E\left[\phi_k\left(B_{t_k} - B_s\right) + \sum_{j=k+1}^{m-1} \phi_j \Delta B_j + \phi_m\left(B_t - B_{t_{m-1}}\right)|\mathcal{F}_s\right],
\end{aligned}$$
e pelas propriedades da esperança condicionada, temos
$$\begin{aligned}
&= E\left[\phi_k\left(B_{t_k} - B_s\right)|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E\left[E\left[\phi_j \Delta B_j|\mathcal{F}_{j-1}\right]|\mathcal{F}_s\right] + \\
&+ E\left[E\left[\phi_m\left(B_t - B_{t_{m-1}}\right)|\mathcal{F}_{t_{m-1}}\right]|\mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

$$= \phi_k E\left[B_{t_k} - B_s|\mathcal{F}_s\right] + \sum_{j=k+1}^{m-1} E\left[\phi_j E\left[\Delta B_j|\mathcal{F}_{j-1}\right]|\mathcal{F}_s\right] +$$
$$+ E\left[\phi_m E\left[B_t - B_{t_{m-1}}|\mathcal{F}_{t_{m-1}}\right]|\mathcal{F}_s\right]$$

e usando a independência dos incrementos do movimento Browniano, obtemos:

$$E\left[M_n(t) - M_n(s)|\mathcal{F}_s\right] = 0.$$

Como a convergência em média quadrática implica a convergência em média quadrática das esperanças condicionadas, temos que

$$E\left[M(t) - M(s)|\mathcal{F}_s\right] = 0$$

e o integral estocástico é uma martingala.

Prova de 4: Com a mesma notação que na prova anterior, $M_n(t)$ é claramente um processo com trajectórias contínuas, pois é o integral estocástico de um processo simples. Então, pela desigualdade maximal de Doob aplicada a $M_n - M_m$, com $p = 2$, temos:

$$P\left[\sup_{0\le t\le T}|M_n(t) - M_m(t)| > \lambda\right] \le \frac{1}{\lambda^2} E\left[|M_n(T) - M_m(T)|^2\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} E\left[\left(\int_0^T \left(u_t^{(n)} - u_t^{(m)}\right) dB_t\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^T \left|u_t^{(n)} - u^{(m)}\right|^2 dt\right]. \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

onde usámos a isometria de Itô. Podemos portanto escolher uma sucessão crescente de naturais n_k, $k = 1, 2, \ldots$, tal que

$$P\left[\sup_{0\le t\le T}\left|M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)\right| > 2^{-k}\right] \le 2^{-k}.$$

Os acontecimentos:

$$A_k := \left\{\sup_{0\le t\le T}\left|M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)\right| > 2^{-k}\right\}$$

verificam portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty.$$

Logo, pelo Lema de Borel-Cantelli, temos que $P\left(\limsup_k A_k\right) = 0$ ou

$$P\left[\sup_{0\le t\le T}\left|M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)\right| > 2^{-k} \text{ para infinitos } k\right] = 0.$$

Portanto, para quase todo o $\omega \in \Omega$, temos que existe $k_1(\omega)$ tal que

$$\sup_{0\le t\le T}\left|M_{n_{k+1}}(t) - M_{n_k}(t)\right| \le 2^{-k} \text{ para } k \ge k_1(\omega).$$

Portanto, $M_{n_k}(t,\omega)$ é uniformemente convergente em $[0,T]$ quase certamente e portanto o limite, que denotamos por $J_t(\omega)$, é uma função contínua na variável t. Finalmente, como $M_{n_k}(t.\cdot) \to M_t(\cdot)$ em média quadrática (ou em $L^2(P)$) para todo o t, então temos que ter

$$M_t = J_t \quad \text{q.c. e para todo o } t \in [0,T].$$

e o integral estocástico indefinido tem uma versão contínua. ■

Exercício 4.13 *Prove a propriedade 1 da proposição anterior, ou seja que*

$$\int_a^b u_s \mathrm{d}B_s + \int_b^c u_s \mathrm{d}B_s = \int_a^c u_s \mathrm{d}B_s.$$

Proposição 4.14 *(variação quadrática do integral estocástico indefinido) Seja $u \in L^2_{a,T}$. Então*

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s dB_s\right)^2 \overset{L^1(\Omega)}{\longrightarrow} \int_0^t u_s^2 ds,$$

quando $n \to \infty$ e com $t_j := \frac{jt}{n}$.

4.5 Extensões do integral estocástico

Na definição do integral estocástico, pode substituir-se $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtração gerada pelo mov. Browniano) por uma filtração maior $\mathcal{H}_t$ tal que o movimento Browniano B_t seja uma $\mathcal{H}_t$-martingala.

Podemos ainda substituir a condição 2) $E\left[\int_0^T u_t^2 dt\right] < \infty$. na definição de $L^2_{a,T}$ pela condição (mais fraca):

$$2')P\left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty\right] = 1. \qquad (4.11)$$

Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos que verifica a condição 1 da def. de $L^2_{a,T}$ (i.e. u é adaptado e mensurável) e a condição 2'). O integral estocástico pode ser definido para processos $u \in L_{a,T}$ mas, neste caso, em geral o integral estocástico não tem valor esperado zero nem se verifica a isometria de Itô.

Exercício 4.15 *Prove diretamente, usando a definição de integral estocástico, que*

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds. \tag{4.12}$$

Sugestão: Note que

$$\sum_j \Delta\left(s_j B_j\right) = \sum_j s_j \Delta B_j + \sum_j B_{j+1} \Delta s_j. \tag{4.13}$$

Exercício 4.16 *Considere uma função determinística g tal que $\int_0^T g(s)^2 ds < \infty$. Mostre que o integral estocástico $\int_0^T g(s)\, dB_s$ é uma variável aleatória Gaussiana e determine a sua média e a sua variância.*

Para uma introdução elementar ao integral estocástico recomenda-se a consulta de [7]. Para uma discussão mais aprofundada, recomendam-se as referências bibliográficas [5], [9], [10] and [11].

Capítulo 5

Fórmula de Itô

5.1 Fórmula de Itô unidimensional

Seja $\Delta B = B_{t+\Delta t} - B_t$. Já sabemos que

$$E\left[(\Delta B)^2\right] = \Delta t,$$

e pela fórmula $E\left[(B_t - B_s)^{2k}\right] = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}(t-s)^k$, temos que

$$\begin{aligned} &Var\left[(\Delta B)^2\right] = E\left[(\Delta B)^4\right] - \left(E\left[(\Delta B)^2\right]\right)^2 \\ &= 3(\Delta t)^2 - (\Delta t)^2 = 2(\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Portanto, se Δt é pequeno, a variância de $(\Delta B)^2$ é desprezável quando comparada com o seu valor esperado. Logo, quando $\Delta t \to 0$ ou "$\Delta t = dt$", temos informalmente:

$$(dB_t)^2 = dt \tag{5.1}$$

A igualdade (5.1) está na base da fórmula de Itô (ou do lema de Itô) que discutiremos neste capítulo. A fórmula de Itô é, essencialmente, uma versão estocástica da regra da cadeia. Consideremos as seguintes igualdades (que são equivalentes).

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t \\ B_t^2 &= 2\int_0^t B_s dB_s + t \\ d\left(B_t^2\right) &= 2B_t dB_t + dt \end{aligned}$$

A última expressão representa o desenvolvimento de Taylor de B_t^2 como função de B_t e t e com a convenção $(dB_t)^2 = dt$ que é motivada pela eq. (5.1).

Se f for uma função de classe C^2 a fórmula de Itô vai mostrar que temos a seguinte representação para $f(B_t)$:

$$\begin{aligned} f(B_t) &= \text{integral estoc. indefinido+processo com trajec. diferenciáveis} \\ &= \text{processo de Itô} \end{aligned}$$

Defina-se $L^1_{a,T}$ como o espaço de processos v tais que

1) v é processo mensurável

2") $P\left[\int_0^T |v_t|\, dt < \infty\right] = 1.$

Definição 5.1 *Um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ diz-se um processo de Itô se verifica:*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds, \tag{5.2}$$

onde $u \in L_{a,T}$ e $v \in L^1_{a,T}$.

Teorema 5.2 *(Fórmula de Itô unidim.) Seja $X = \{X_t, 0 \le t \le T\}$ um processo de Itô da forma (5.2). Seja $f(t,x)$ uma função de classe $C^{1,2}$. Então o processo $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos a fórmula*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, u_s dB_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\, u_s^2 ds. \end{aligned}$$

Na forma diferencial, a fórmula de Itô fica:

$$\begin{aligned} df(t,X_t) = &\frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\, dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\, dX_t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\,(dX_t)^2. \end{aligned}$$

onde $(dX_t)^2$ é calculado usando a tabela de produtos:

$\times$	dB_t	dt
dB_t	dt	0
dt	0	0

A fórmula de Itô para $f(t,x)$ e $X_t = B_t$ ou seja $Y_t = f(t, B_t)$, fica

$$\begin{aligned} f(t,B_t) = f(0,0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,B_s)\,dB_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,B_s)\,ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} df(t,B_t) = &\frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\,dt. \end{aligned}$$

A fórmula de Itô para $f(x)$ e $X_t = B_t$, ou seja $Y_t = f(B_t)$, é simplesmente

$$df(B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t)\,dt.$$

5.2 A fórmula de Itô multidimensional

Suponha que $B_t := (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^m)$ é um movimento Browniano de dimensão m, ou seja, as componentes B_t^k, $k = 1, ..., m$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes. Considere um processo de Itô de dimensão n, definido por

$$\begin{aligned} X_t^1 &= X_0^1 + \int_0^t u_s^{11} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{1m} dB_s^m + \int_0^t v_s^1 ds, \\ X_t^2 &= X_0^2 + \int_0^t u_s^{21} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{2m} dB_s^m + \int_0^t v_s^2 ds, \\ &\vdots \\ X_t^n &= X_0^n + \int_0^t u_s^{n1} dB_s^1 + \cdots + \int_0^t u_s^{nm} dB_s^m + \int_0^t v_s^n ds. \end{aligned}$$

Em notação diferencial temos

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^m u_t^{ij} dB_t^j + v_t^i dt,$$

com $i = 1, 2, \ldots, n$. Ou então, de forma ainda mais compacta,

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt,$$

onde v_t é um processo n-dimensional, u_t é uma matriz $n \times m$ de processos. Assumimos que as componentes de u pertencem a $L_{a,T}$ e as componentes de v pertencem a $L^1_{a,T}$.

Teorema 5.3 *(fórmula de Itô multidimensional) Se $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é de classe $C^{1,2}$ então $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos a fórmula de Itô*

$$\begin{aligned} dY_t^k = {} & \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, X_t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, X_t)\, dX_t^i \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)\, dX_t^i dX_t^j. \end{aligned}$$

O produto dos diferenciais $dX_t^i dX_t^j$ é calculado de acordo com as regras:

$$\begin{aligned} dB_t^i dB_t^j &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ dt & \text{se } i = j \end{cases}, \\ dB_t^i dt &= 0, \\ (dt)^2 &= 0. \end{aligned}$$

No caso particular de B_t ser um movimento Browniano n-dimensional e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ser de classe C^2 com $Y_t = f(B_t)$ então a fórmula de Itô é

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_t)\, dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(B_t) \right) ds$$

Exemplo 5.4 *(fórmula de integração por partes) Se X_t^1 e X_t^2 são processos de Itô e $Y_t = X_t^1 X_t^2$, então pela fórmula de Itô com $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, temos*

$$d\left(X_t^1 X_t^2\right) = X_t^2 dX_t^1 + X_t^1 dX_t^2 + dX_t^1 dX_t^2.$$

Ou seja:

$$X_t^1 X_t^2 = X_0^1 X_0^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t dX_s^1 dX_s^2.$$

Exemplo 5.5 *Considere o processo*

$$Y_t = \left(B_t^1\right)^2 + \left(B_t^2\right)^2 + \cdots + \left(B_t^n\right)^2.$$

Represente este processo em termos de integrais estocásticos relativamente ao mov. Browniano n-dimensional. Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ temos

$$\begin{aligned} dY_t &= 2B_t^1 dB_t^1 + \cdots + 2B_t^n dB_t^n \\ &\quad + ndt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$Y_t = 2\int_0^t B_s^1 dB_s^1 + \cdots + 2\int_0^t B_s^n dB_s^n + nt.$$

Exercício 5.6 *Seja $B_t := (B_t^1, B_t^2)$ um movimento Browniano bidimensional. Represente o processo*

$$Y_t = \left(B_t^1 t, \left(B_t^2\right)^2 - B_t^1 B_t^2\right)$$

como um processo de Itô.

Solução 5.7 *Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(t,x) = f(t, x_1, x_2) = (x_1 t, x_2^2 - x_1 x_2)$, temos*

$$\begin{aligned} dY_t^1 &= B_t^1 dt + t dB_t^1, \\ dY_t^2 &= -B_t^2 dB_t^1 + \left(2B_t^2 - B_t^1\right) dB_t^2 + dt, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} Y_t^1 &= \int_0^t B_s^1 ds + \int_0^t s dB_s^1, \\ Y_t^1 &= -\int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t \left(2B_s^2 - B_s^1\right) dB_s^2 + t. \end{aligned}$$

Vamos agora descrever como se poderia demonstrar rigorosamente a fórmula de Itô unidimensional. O processo

$$\begin{aligned} Y_t = f(0, X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, u_s dB_s \\ &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\, v_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, u_s^2 ds. \end{aligned}$$

é um processo de Itô. Assumimos que f e as suas derivadas parciais são limitadas (o caso geral pode provar-se aproximando f e as suas derivadas parciais por funções limitadas). Como sabemos, o integral estocástico pode ser aproximado por uma sucessão de integrais estocásticos de processos simples e portanto podemos assumir que u e v são processos simples.

Dividindo o intervalo $[0,t]$ em n sub-intervalos iguais, temos

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}\right) - f\left(t_k, X_{t_k}\right)\right).$$

Pela fórmula de Taylor:

$$\begin{aligned} f\left(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}\right) - f\left(t_k, X_{t_k}\right) &= \frac{\partial f}{\partial t}\left(t_k, X_{t_k}\right)\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\left(t_k, X_{t_k}\right)\Delta X_k \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right)\left(\Delta X_k\right)^2 + Q_k, \end{aligned}$$

onde Q_k é o resto ou erro da fórmula de Taylor. Temos também que

$$\begin{aligned} \Delta X_k = X_{t_{k+1}} - X_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_s ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_s dB_s \\ &= v(t_k)\Delta t + u(t_k)\Delta B_k + S_k, \end{aligned}$$

onde S_k é o resto ou erro. Daqui, obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\Delta X_k\right)^2 &= \left(v(t_k)\right)^2 (\Delta t)^2 + \left(u(t_k)\right)^2 \left(\Delta B_k\right)^2 \\ &+ 2v(t_k)\,u(t_k)\,\Delta t \Delta B_k + P_k, \end{aligned}$$

onde P_k é o resto. Substituindo estes termos, obtemos

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2}I_4 + \frac{1}{2}K_1 + K_2 + R,$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}\left(t_k, X_{t_k}\right)\Delta t, \\ I_2 &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}\left(t_k, X_{t_k}\right) v(t_k)\,\Delta t, \\ I_3 &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x}\left(t_k, X_{t_k}\right) u(t_k)\,\Delta B_k, \\ I_4 &= \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right)\left(u(t_k)\right)^2 \left(\Delta B_k\right)^2. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right)\left(v\left(t_k\right)\right)^2 (\Delta t)^2, \\
K_2 &= \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(t_k, X_{t_k}\right) v\left(t_k\right) u\left(t_k\right) \Delta t \Delta B_k, \\
R &= \sum_k \left(Q_k + S_k + P_k\right).
\end{aligned}
$$

Quando $n \to \infty$, é simples mostrar que

$$
\begin{aligned}
I_1 &\to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}\left(s, X_s\right) ds, \\
I_2 &\to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\left(s, X_s\right) v_s ds, \\
I_3 &\to \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}\left(s, X_s\right) u_s dB_s.
\end{aligned}
$$

Como já vimos antes (variação quadrática do movimento Browniano), temos que

$$
\sum_k \left(\Delta B_k\right)^2 \to t,
$$

pelo que

$$
I_4 \to \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(s, X_s\right) u_s^2 ds.
$$

Por outro lado, temos também que

$$
\begin{aligned}
K_1 &\to 0, \\
K_2 &\to 0.
\end{aligned}
$$

Também se pode mostrar (mas é mais difícil e mais técnico) que

$$
R \to 0.
$$

Conclusão: no limite obtemos a fórmula de Itô.

5.3 Teorema da representação integral de Itô

Seja $u \in L^2_{a,T}$ (u adaptado, mensurável e de quadrado integrável) e seja

$$
M_t = \mathbb{E}\left[M_0\right] + \int_0^t u_s dB_s. \tag{5.3}
$$

Já sabemos que M_t é uma $\mathcal{F}_t$-martingala. Vamos agora mostrar que qualquer martingala de quadrado integrável é da forma (5.3).

Teorema 5.8 *(Representação integral de Itô): Seja $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Então existe um e só um processo $u \in L^2_{a,T}$ tal que*

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^t u_s dB_s. \tag{5.4}$$

Proof. Vamos dividir a prova em 3 partes:

1. Considere-se uma variável aleatória F com a forma

$$F = \exp\left(\int_0^T h(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T h(s)^2\,ds\right),$$

onde h é uma função determinística e $\int_0^T h(s)^2\,ds < \infty$. Apliquemos a fórmula de Itô a $f(x) = e^x$, com $X_t = \int_0^t h(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)^2\,ds$ e $Y_t = f(X_t)$. Então

$$\begin{aligned} dY_t &= Y_t\left(h(t)\,dB_t - \frac{1}{2}h(t)^2\,dt\right) + \frac{1}{2}Y_t\,(h(t)\,dB_t)^2 \\ &= Y_t h(t)\,dB_t. \end{aligned}$$

Ou seja:

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_s h(s)\,dB_s.$$

Obtém-se portanto que

$$\begin{aligned} F = Y_T &= 1 + \int_0^T Y_s h(s)\,dB_s \\ &= \mathbb{E}[F] + \int_0^T Y_s h(s)\,dB_s \end{aligned}$$

Note-se que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_s h(s))^2\,ds\right] < \infty,$$

pois $\mathbb{E}[Y_t^2] = \exp\left(\int_0^t h(u)^2\,du\right) < \infty$. Logo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\int_0^T (Y_s h(s))^2\,ds\right] &\leq \int_0^T \exp\left(\int_0^s h(u)^2\,du\right) h(s)^2\,ds \\ &\leq \exp\left(\int_0^T h(u)^2\,du\right)\int_0^T h(s)^2\,ds. \end{aligned}$$

2. A representação (5.4) também é válida (por linearidade) para combinações lineares de variáveis aleatórias da forma (**??**). No caso geral, $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ pode ser aproximada (em média quadrática) pela sucessão $\{F_n\}$ de combinações lineares de variáveis aleatórias da forma (**??**). Para mais detalhes sobre esta questão, recomenda-se a consulta de [10]. Então:
$$F_n = \mathbb{E}[F_n] + \int_0^t u_s^{(n)} dB_s.$$
Pela isometria do integral de Itô, temos
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(F_n - F_m)^2\right] &= (\mathbb{E}[F_n - F_m])^2 + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right]\end{aligned}$$
e $\{F_n\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Logo
$$\mathbb{E}\left[(F_n - F_m)^2\right] \longrightarrow 0 \text{ qdo. } n, m \to \infty.$$
E portanto
$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(u_s^{(n)} - u_s^{(m)}\right)^2 ds\right] \longrightarrow 0 \text{ qdo. } n, m \to \infty.$$
Logo, $\left\{u^{(n)}\right\}$ é uma sucessão de Cauchy em $L^2([0,T] \times \Omega)$. Como este é um espaço completo, temos que $u^{(n)} \to u$ em $L^2([0,T] \times \Omega)$. O processo u é adaptado pois $u^{(n)} \in L^2_{a,T}$ e existe uma subsucessão de $\left\{u^{(n)}(t,\omega)\right\}$ convergente para $u(t,\omega)$ p.q.t. $(t,\omega) \in [0,T] \times \Omega$. Logo, $u(t,\cdot)$ é $\mathcal{F}_t$-mensurável p.q.t. t. Modificando este processo u num conjunto de medida nula na variável t, obtemos um processo u que é adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}$. Temos que
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[(F_n - F)^2\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}[F_n] + \int_0^T u_s^{(n)} dB_s - F\right)^2 = 0.$$
Por outro lado, pela isometria de Itô,
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}[F_n] - \mathbb{E}[F])^2 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\int_0^T \left(u_s^{(n)} - u_s\right) dB_s\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\int_0^T \left(u_s^{(n)} - u_s\right)^2 ds = 0.$$
E portanto $F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s dB_s$.

3. Unicidade: Suponha que $u^{(1)}$ e $u^{(2)} \in L^2_{a,T}$ e

$$F = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s^{(1)} dB_s = \mathbb{E}[F] + \int_0^T u_s^{(2)} dB_s.$$

Pela isometria de Itô, temos

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T \left(u_s^{(1)} - u_s^{(2)}\right) dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \left(u_s^{(1)} - u_s^{(2)}\right)^2 ds\right] = 0$$

e portanto

$$u^{(1)}(t,\omega) = u(t,\omega)^{(2)} \quad \text{p.q.t. } (t,\omega) \in [0,T] \times \Omega.$$

■

5.4 Teorema da representação de martingala

Teorema 5.9 *(Teorema de representação de martingala) Suponha que $\{M_t, t \in [0,T]\}$ é uma $\{\mathcal{F}_t\}$-martingala e que $\mathbb{E}[M_T^2] < \infty$. Então existe um e só um processo $u \in L^2_{a,T}$ tal que*

$$M_t = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t u_s dB_s \qquad \forall t \in [0,T].$$

Proof. Aplica-se o teorema da representação integral de Itô a $F = M_T$. Portanto $\exists^1 u \in L^2_{a,T}$ tal que

$$M_T = \mathbb{E}[M_T] + \int_0^T u_s dB_s.$$

Como $\{M_t, t \in [0,T]\}$ é martingala, $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$ e

$$\begin{aligned} M_t &= \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_T]|\mathcal{F}_t] + \mathbb{E}\left[\int_0^T u_s dB_s|\mathcal{F}_t\right] \\ &= \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t u_s dB_s. \end{aligned}$$

onde se usou a propriedade de martingala do integral estocástico indefinido.
■

Exemplo 5.10 *Seja $F = B_T^3$. Qual a representação integral de Itô desta v.a.? Pela fórmula de Itô (aplicada a $f(x) = x^3$ e $B_T^3 = f(B_t)$), temos:*

$$B_T^3 = \int_0^T 3B_t^2 dB_t + 3\int_0^T B_t dt.$$

Integrando por partes, temos

$$\int_0^T B_t dt = TB_T - \int_0^T t dB_t = \int_0^T (T-t)\, dB_t.$$

Logo

$$F = B_T^3 = \int_0^T 3\left[B_t^2 + (T-t)\right] dB_t. \tag{5.5}$$

E como $\mathbb{E}[B_T^3] = 0$ (pois $B_T \sim N(0,T)$), a representação integral de Itô é dada por (5.5).

Exemplo 5.11 *Qual o processo u tal que $\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2}B_T^2 = -\frac{T^3}{6} + \int_0^T u_t dB_t$? Aplicando a fórmula de Itô a $X_t = f(t, B_t) = t^2B_t^2$, com $f(t,x) = t^2x^2$, temos:*

$$T^2B_T^2 = \int_0^T 2tB_t^2 dt + \int_0^T 2t^2 B_t dB_t + \int_0^T t^2 dt.$$

Daqui resulta que:

$$\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2}B_T^2 = -\frac{T^3}{6} - \int_0^T t^2 B_t dB_t$$

e portanto

$$u_t = -t^2 B_t.$$

Note-se que $\mathbb{E}\left[\int_0^T tB_t^2 dt - \frac{T^2}{2}B_T^2\right] = -\frac{T^3}{6}$.

Em geral, a fórmula de integração por partes é a seguinte.

Teorema 5.12 *(integração por partes) Suponha que $f(s)$ é uma função determinística, contínua e de classe C^1. Então, temos:*

$$\int_0^t f(s)\, dB_s = f(t)\, B_t - \int_0^t f'(s)\, B_s ds.$$

Proof. Para provar a fórmula de integração por partes, basta aplicar a fórmula de Itô a $g(t,x) = f(t)\,x$, obtendo ■

$$f(t)\, B_t = \int_0^t f'(s)\, B_s ds + \int_0^t f(s)\, dB_s.$$

Capítulo 6

Equações Diferenciais Estocásticas

6.1 Motivação e exemplos

Uma equação diferencial ordinária (EDO) determinística de ordem n tem a forma geral

$$f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

onde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função e $x(t)$ é a função incógnita. Uma equação diferencial ordinária de 1^a ordem pode representar-se por

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(t, x(t))$$

ou

$$dx(t) = b(t, x(t))\, dt$$

A versão discreta é a equação às diferenças

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \approx b(t, x(t))\, \Delta t$$

Exemplo 6.1 *A EDO linear de 1ª ordem*

$$\frac{dx(t)}{dt} = cx(t),$$

com c constante, tem como solução

$$x(t) = x(0)\, e^{ct}.$$

Uma equação diferencial estocástica (EDE) na forma diferencial tem a forma geral

$$\begin{aligned} dX_t &= b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 &= X_0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde $b\left(t, X_t\right)$ é o coeficiente de drift ou deriva e $\sigma\left(t, X_t\right)$ é o coeficiente de difusão. A EDE na forma integral é dada por

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s. \tag{6.2}$$

Uma interpretação "naif"da EDE é considerar a versão discreta $\Delta X_t \approx b\left(t, X_t\right) \Delta t + \sigma\left(t, X_t\right) \Delta B_t$ e que portanto a variável aleatória ΔX_t tem uma distribuição "próxima"da distribuição normal $N\left(b\left(t, X_t\right) \Delta t, \left(\sigma\left(t, X_t\right)\right)^2 \Delta t\right)$.

Apresenta-se a seguir a definição rigorosa de soluçãocde uma equação diferencial estocástica.

Definição 6.2 *Uma solução da EDE (6.1) ou (6.2) é um processo estocástico* $\{X_t\}$ *que satisfaz:*

1. $\{X_t\}$ *é um processo adaptado ao mov. Browniano com trajectórias contínuas.*
2. $\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\sigma\left(s, X_s\right)\right)^2 ds\right] < \infty.$
3. $\{X_t\}$ *satisfaz a EDE (6.1) ou (6.2)*

As soluções de uma equação diferencial estocástica também são conhecidas por "difusões"ou "processos de difusão".

6.2 A EDE do movimento Browniano geométrico e a Eq. de Langevin

Considere-se a EDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \tag{6.3}$$

onde μ e σ são constantes, ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \tag{6.4}$$

Como resolver esta EDE? Suponhamos que $X_t = f(t, B_t)$ com $f \in C^{1,2}$. Pela fórmula de Itô, temos

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds + \tag{6.5}$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s.$$

Comparando (6.4) com (6.5) temos (existe unicidade de representação como processo de Itô)

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) = \mu f(s, B_s), \tag{6.6}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) = \sigma f(s, B_s). \tag{6.7}$$

Derivando a eq. (6.7), obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x) = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) = \sigma^2 f(s, x)$$

e substituindo em (6.6), temos que

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) f(s, x) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, x).$$

Por separação de variáveis $f(s, x) = g(s)\, h(x)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, x) = g'(s)\, h(x)$$

e

$$g'(s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) g(s)$$

que é uma EDO linear com solução:

$$g(s) = g(0) \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) s \right]$$

Usando a eq. (6.7), obtemos $h'(x) = \sigma h(x)$ e portanto

$$f(s, x) = f(0, 0) \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) s + \sigma x \right].$$

Conclusão: a solução da EDE (6.3) é o processo

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right], \tag{6.8}$$

que é precisamente o movimento Browniano geométrico. Note-se que se obteve a solução da EDE resolvendo uma equação diferencial parcial (EDP) determinística.

Para verificar que (6.8) satisfaz a EDE (6.3) ou (6.4), basta aplicar a fórmula de Itô a $X_t = f(t, B_t)$, com

$$f(t, x) = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma x\right].$$

Obtemos

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)X_s + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s\right] ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \\ &= X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s, \end{aligned}$$

ou

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

e a EDE é satisfeita pelo movimento Browniano geométrico.

Considere-se agora a equação de Langevin

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \tag{6.9}$$

onde μ e σ são constantes, ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s.$$

A versão discreta desta EDE é

$$X_{t+1} = (1 + \mu) X_t + \sigma (B_{t+1} - B_t),$$

ou

$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_t,$$

com $\phi = 1 + \mu$ e $Z_t \sim N(0, \sigma^2)$, que é a equação para uma série temporal autoregressiva de ordem 1.

Considere-se o processo

$$Y_t = e^{-\mu t} X_t$$

ou $Y_t = f(t, X_t)$ com $f(t,x) = e^{-\mu t}x$. Pela fórmula de Itô,

$$\begin{aligned} Y_t = Y_0 &+ \int_0^t \left(-ce^{-\mu s}X_s + ce^{-\mu s}X_s + \frac{1}{2}\sigma^2 \times 0 \right) ds \\ &+ \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s. \end{aligned}$$

Logo, a solução da EDE (6.9) é o processo

$$X_t = e^{\mu t}X_0 + e^{\mu t}\int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s. \tag{6.10}$$

Se X_0 é constante, o processo (6.10) diz-se o processo de Ornstein-Uhlenbeck.

Exemplo 6.3 *O movimento Browniano geométrico (outra vez). Considere-se a EDE*

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \tag{6.11}$$

ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \tag{6.12}$$

Vamos supôr que a solução da EDE tem a forma

$$X_t = e^{Z_t},$$

onde Z_t é um processo estocástico. De forma equivalente, temos que

$$Z_t = \ln(X_t).$$

Aplicando a fórmula de Itô a $f(X_t) = \ln(X_t)$, obtemos

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{X_t}dX_t + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{X_t^2}\right)(dX_t)^2 \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

Ou seja

$$Z_t = Z_0 + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t$$

e

$$X_t = X_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B_t\right].$$

De forma que obtemos de novo o movimento Browniano geométrico como solução da EDE (6.11).

A solução da EDE linear homogénea

$$dX_t = b(t) X_t dt + \sigma(t) X_t dB_t$$

é dada por

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \left(b(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s\right].$$

Para obter esta solução pode-se aplicar a mesma técnica que no Exemplo 6.3.

Exercício 6.4 *Determine a solução da EDE*

$$\begin{aligned} dX_t &= a(m - X_t) dt + \sigma dB_t, \\ X_0 &= x, \end{aligned}$$

com $a, \sigma > 0$ e $m \in \mathbb{R}$. Calcule também a média e a variância de X_t e quando $t \to \infty$ e determine a distribuição de X_t (distribuição invariante ou distribuição estacionária).

Exercício 6.5 *Considere a EDE*

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \\ X_0 &= X_0. \end{aligned}$$

a) Supondo que $X_t = f(t, B_t)$, onde f é uma função de classe $C^{1,2}$, aplique a fórmula de Itô e determine a equação diferencial parcial (EDP) satisfeita pela função f.

b) Aplicando o método de separação de variáveis ($f(s,x) = g(s)h(x)$), e considerando a EDP obtida na alínea anterior, determine as equações diferenciais ordinárias (EDO) satisfeitas por g e h.

c) Determine finalmente o processo X_t.

6.3 Teorema de existência e unicidade para EDE's

Teorema 6.6 *(existência e unicidade de soluções) Sejam $T > 0$, $b(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\sigma(\cdot,\cdot) : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ funções mensuráveis tais que as seguintes condições são satisfeitas.*

1. *Propriedade de crescimento linear:*

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1 + |x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,T].$$

2. *Propriedade de Lipschitz:*

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq D|x-y|, \ \forall x,y \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \in [0,T].$$

Assuma-se também que Z é uma variável aleatória independente do movimento Browniano B e $\mathbb{E}\left[|Z|^2\right] < \infty$. Então, a EDE

$$X_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \tag{6.13}$$

tem uma única solução. Ou seja, existe um único processo estocástico $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ contínuo, adaptado, que satisfaz (6.13) e tal que

$$E\left[\int_0^T |X_s|^2\, ds\right] < \infty.$$

Proof. Consideremos o espaço $L^2_{a,T}$ dos processos adaptados à filtração $\mathcal{F}_t^Z := \sigma(Z) \cup \mathcal{F}_t$ tais que $E\left[\int_0^T |X_s|^2\, ds\right] < \infty$. Neste espaço, considere-se a norma:

$$\|X\| = \left(\int_0^T e^{-\lambda s} E\left[|X_s|^2\right] ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

onde $\lambda > 2D^2(T+1)$.

Defina-se o operador $\mathcal{L} : L^2_{a,T} \to L^2_{a,T}$ por:

$$(\mathcal{L}X)_t = Z + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s$$

Pela propriedade de crescimento linear de b e σ, o operador $\mathcal{L}$ está bem definido. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pela isometria de Itô, temos que

$$\begin{aligned}
&E\left[|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t|^2\right] \leq 2E\left[\left(\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))\, ds\right)^2\right] \\
&+ 2E\left[\left(\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))\, dB_s\right)^2\right] \\
&\leq 2TE\left[\int_0^t (b(s,X_s) - b(s,Y_s))^2\, ds\right] + \\
&+ 2E\left[\int_0^t (\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s))^2\, ds\right]
\end{aligned}$$

Pela propriedade de Lipschitz, temos:

$$E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] \leq 2D^2(T+1)\,E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right].$$

Defina-se $K = 2D^2(T+1)$. Multiplicando a desigualdade anterior por $e^{-\lambda t}$ e integrando em $[0,T]$, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T e^{-\lambda t} E\left[\left|(\mathcal{L}X)_t - (\mathcal{L}Y)_t\right|^2\right] dt \\ &\leq K\int_0^T e^{-\lambda t} E\left[\int_0^t (X_s - Y_s)^2\,ds\right] dt.\end{aligned}$$

Trocando a ordem de integração, temos

$$\begin{aligned}&= K\int_0^T \left[\int_s^T e^{-\lambda t} dt\right] E\left[(X_s - Y_s)^2\right] ds \\ &\leq \frac{K}{\lambda}\int_0^T e^{-\lambda s} E\left[(X_s - Y_s)^2\right] ds.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\left\|(\mathcal{L}X) - (\mathcal{L}Y)\right\| \leq \sqrt{\frac{K}{\lambda}}\,\|X - Y\|.$$

E como $\lambda > K$, temos que $\sqrt{\frac{K}{\lambda}} < 1$, pelo que operador $\mathcal{L}$ é uma contracção no espaço $L^2_{a,T}$. Então, pelo teorema do ponto fixo, existe um e só um ponto fixo para $\mathcal{L}$ e esse ponto fixo é precisamente a solução da EDE:

$$(\mathcal{L}X)_t = X_t.$$

■

Para uma demonstração do teorema de existência e unicidade baseada em aproximação de Picard e na desigualdade de Gronwall, recomenda-se a consulta de [10].

6.4 Exemplos

Exemplo 6.7 *O movimento Browniano geométrico*

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]$$

é solução da EDE

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ S_0 &= S_0. \end{aligned}$$

Esta EDE descreve a evolução do preço de um activo financeiro (com risco) no modelo de Black-Scholes. Consideremos o modelo de Black-Scholes com coeficientes $\mu(t)$ e $\sigma(t) > 0$ dependentes do tempo:

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left(\mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t\right), \\ S_0 &= S_0. \end{aligned}$$

Seja $S_t = \exp(Z_t)$ e $Z_t = \ln(S_t)$. Pela fórmula de Itô com $f(x) = \ln(x)$, temos que

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{S_t}\left(S_t\left(\mu(t)\, dt + \sigma(t)\, dB_t\right)\right) - \frac{1}{2S_t^2}\left(S_t^2 \sigma^2(t)\, dt\right) \\ &= \left(\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right) dt + \sigma(t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Pelo que

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s$$

e portanto,

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right) ds + \int_0^t \sigma(s)\, dB_s\right).$$

Exemplo 6.8 *(processo de Orsntein-Uhlenbeck com reversão para a média). Considere a EDE com reversão para média*

$$\begin{aligned} dX_t &= a(m - X_t)\, dt + \sigma dB_t, \\ X_0 &= x, \end{aligned}$$

com $a, \sigma > 0$ e $m \in \mathbb{R}$.

A Solução da EDO homogénea associada $dx_t = -a x_t dt$ é $x_t = x e^{-at}$. Considere-se a mudança de variáveis $X_t = Y_t e^{-at}$ ou $Y_t = X_t e^{at}$. Pela fórmula de Itô aplicada a $f(t, x) = x e^{at}$, temos que

$$Y_t = x + m\left(e^{at} - 1\right) + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s.$$

Logo,

$$X_t = m + (x - m)\, e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s. \tag{6.14}$$

Este processo é conhecido como o processo de Orsntein-Uhlenbeck com reversão para a média. É um processo Gaussiano, pois um integral estocástico do tipo $\int_0^t f(s)\, dB_s$*, onde* f *é uma função determinística, é um processo Gaussiano. O valor esperado é*

$$E[X_t] = m + (x - m)\, e^{-at}$$

e a função de covariância obtém-se aplicando a isometria de Itô:

$$\begin{aligned} Cov[X_t, X_s] &= \sigma^2 e^{-a(t+s)} E\left[\left(\int_0^t e^{ar} dB_r\right)\left(\int_0^s e^{ar} dB_r\right)\right] \\ &= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \int_0^{t\wedge s} e^{2ar} dr \\ &= \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}\right). \end{aligned}$$

Note-se que

$$X_t \sim N\left[m + (x - m)\, e^{-at}, \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2at}\right)\right].$$

Quando $t \to \infty$*, a distribuição de* X_t *converge para*

$$\nu := N\left[m, \frac{\sigma^2}{2a}\right],$$

que é a distribuição invariante ou estacionária. Se X_0 *tem distribuição* ν *então a distribuição de* X_t *será a distribuição* ν *para todo o* t*.*

Algumas aplicações financeiras do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- *Modelo de Vasicek para a taxa de juro:*

$$dr_t = a\,(b - r_t)\, dt + \sigma dB_t,$$

com a, b, σ *constantes. A solução da EDE é*

$$r_t = b + (r_0 - b)\, e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s.$$

- Modelo de Black-Scholes com volatilidade estocástica: assume-se que a volatilidade $\sigma(t) = f(Y_t)$ é função de um processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média

$$dY_t = a(m - Y_t)\,dt + \beta dW_t,$$

com a, m, β constantes e onde $\{W_t, 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano. A EDE que modela a evolução do preço do activo com risco é

$$dS_t = \mu S_t dt + f(Y_t)\,S_t dB_t$$

onde $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ é um movimento Browniano. Os movimentos Brownianos W_t e B_t podem estar correlacionados, i.e.,

$$E[B_t W_s] = \rho(s \wedge t).$$

6.5 EDE's Lineares

Considere a EDE

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\,ds + \int_0^t c(s)\,X_s dB_s,$$

com f e c funções determinísticas e contínuas. Suponha que f satisfaz as condições de Lipschitz e de crescimento linear em x. Então, pelo teorema de existência e unicidade de soluções, existe uma solução para a EDE e é única. Como obter a solução? Considere o "factor integrante"

$$F_t = \exp\left(\int_0^t c(s)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c(s)^2\,ds\right).$$

É claro que F_t é solução da EDE se $f = 0$ e $x = 1$. Suponha que $X_t = F_t Y_t$ ou que $Y_t = (F_t)^{-1} X_t$. Então, pela fórmula de Itô,

$$dY_t = (F_t)^{-1} f(t, F_t Y_t)\,dt$$

e $Y_0 = x$. Esta equação para Y é uma EDO com coeficientes aleatórios (é uma equação diferencial determinística parametrizada por $\omega \in \Omega$).

Exemplo 6.9 *Por exemplo, com $f(t,x) = f(t)x$, então temos a equação diferencial ordinária*

$$\frac{dY_t}{dt} = f(t)Y_t$$

e portanto

$$Y_t = x \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right).$$

Logo,

$$X_t = x \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds + \int_0^t c(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t c(s)^2\, ds\right).$$

Consideremos agora uma EDE linear da forma

$$\begin{aligned} dX_t &= (a(t) + b(t) X_t)\, dt + (c(t) + d(t) X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= x, \end{aligned}$$

onde a, b, c, d são funções determinísticas contínuas. Suponha que solução é da forma

$$X_t = U_t V_t, \tag{6.15}$$

onde

$$\begin{cases} dU_t = b(t)U_t dt + d(t)U_t dB_t, \\ dV_t = \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, dB_t. \end{cases}$$

e $U_0 = 1$, $V_0 = x$. Do exemplo anterior, já sabemos que

$$U_t = \exp\left(\int_0^t b(s)\, ds + \int_0^t d(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t d(s)^2\, ds\right) \tag{6.16}$$

Por outro lado, calculando o diferencial de (6.15) e usando a fórmula de Itô com $f(u, v) = uv$, obtemos

$$\begin{aligned} dX_t &= V_t dU_t + U_t dV_t + \frac{1}{2}(dU_t)(dV_t) + \frac{1}{2}(dV_t)(dU_t) \\ &= (b(t)X_t + \alpha(t) U_t + \beta(t)\, d(t)U_t)\, dt + (d(t)X_t + \beta(t) U_t)\, dB_t. \end{aligned}$$

Comparando com a EDE inicial para X, temos que

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha(t) U_t + \beta(t)\, d(t)U_t, \\ c(t) &= \beta(t) U_t. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \beta(t) &= c(t)U_t^{-1}, \\ \alpha(t) &= [a(t) - c(t)\, d(t)]\, U_t^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto:

$$X_t = U_t \left(x + \int_0^t [a(s) - c(s)\, d(s)]\, U_s^{-1} ds + \int_0^t c(s)\, U_s^{-1} dB_s \right),$$

onde U_t é dado por (6.16).

No caso unidimensional ($n = 1$), a condição de Lipschitz para o coef. σ no teorema de existência e unicidade de soluções, pode enfraquecer-se se $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ (coeficiente de difusão não dependente do tempo). Suponha-se que o coeficiente b satisfaz a condição de Lipschitz e o coef. σ satisfaz a condição

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D\, |x - y|^{\alpha}, \;\; x, y \in \mathbb{R}, \;\; t \in [0, T]$$

com $\alpha \geq \frac{1}{2}$. Então, existe uma única solução para a EDE. Para mais detalhes sobre este caso, recomenda-se a consulta de [5].

Exemplo 6.10 *A EDE do modelo de taxas de juro de Cox-Ingersoll-Ross:*

$$\begin{aligned} dr_t &= a(b - r_t)\, dt + \sigma \sqrt{r_t} dB_t \\ r_0 &= x, \end{aligned}$$

tem uma e só uma solução.

6.6 Soluções fortes e fracas

O problema de obter uma solução de uma EDE pode ser definido de forma diferente. Suponhamos que são dados só os coeficientes $b(t, x)$ e $\sigma(t, x)$ e que pretendemos determinar um par de processos estocásticos, $\{X_t\}$ e $\{B_t\}$, definidos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, e com uma filtração $\{\mathcal{H}_t\}$ tal que $\{B_t\}$ é um $\{\mathcal{H}_t\}$-movimento Browniano, e tais que $\{X_t\}$ e $\{B_t\}$ satisfazem a EDE

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \tag{6.17}$$

nesse espaço de probabilidade.

Nesse caso, diz-se que $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{H}_t\}, \{X_t\}, \{B_t\})$ é uma solução fraca ("weak solution") de (6.17). Podem demonstrar-se os seguintes resultados (para o leitor interessado, ver [5]):

- Toda a solução forte é uma solução fraca.

- Diz-se que uma EDE satisfaz a propriedade de unicidade fraca se duas soluções fracas têm a mesma distribuição (mesmas distribuições dimensionalmente finitas ou fidis). Se os coeficientes satisfazem as condições do teorema de existência e unicidade, então a EDE satisfaz a propriedade de unicidade fraca.
- A existência de de soluções fracas pode garantir-se supondo apenas que os coeficientes $b(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ são funções contínuas e limitadas.

Exemplo 6.11 *Considere-se a EDE de Tanaka*

$$\begin{aligned} dX_t &= \operatorname{sign}(X_t)\, dB_t, \\ X_0 &= 0, \end{aligned}$$

onde

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} +1 & se\ x \geq 0 \\ -1 & se\ x < 0. \end{cases}$$

Note-se que $\operatorname{sign}(x)$ *não satisfaz a condição de Lipschitz (nem sequer é contínua em* 0*). Logo, não se pode aplicar o teorema de existência e unicidade neste caso. Pode mostrar-se que não existe nenhuma solução (no sentido forte) para esta EDE, mas existe uma solução fraca (que é única) - Este exemplo é explorado detalhadamente em [10].*

Exercício 6.12 *Considere o seguinte sistema de equações diferenciais estocásticas:*

$$dX(t) = 4e^{2t}\, dt + t\, dW(t) \ \ com\ X(0) = 10.$$

$$dZ(t) = \left(t^2 + 3\sin t\right)\, dt + 4\, t\, dW(t), \ \ com\ Z(0) = 5.$$

a) Escreva a equação dada na forma integral.
b) Deduza a respectiva solução.

Exercício 6.13 *O modelo Cox-Ingersoll-Ross (CIR) para o processo de taxa de juro* $R(t)$ *é*

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))\, dt + \sigma\sqrt{R(t)}\, dW(t),$$

onde α, β *e* σ *são constantes positivas. A equação CIR não tem solução fechada. Contudo, podem determinar-se o valor médio e a variância de* $R(t)$*.*

a) Calcule o valor médio de $R(t)$*. (Sugestão: Seja* $X(t) = e^{\beta t} R(t)$*. Use a função* $f(t,x) = e^{\beta t} x$*, aplique a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).*

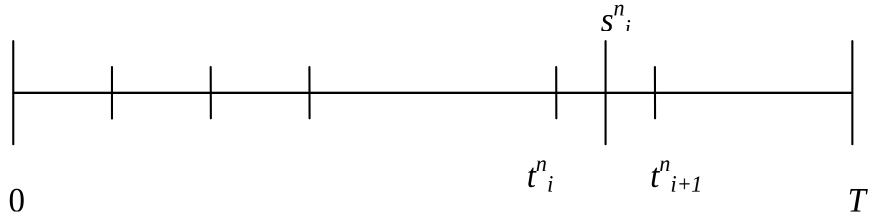


Figura 6.1: Partição

b) Calcule a variância de $R(t)$. (Sugestão: Calcule $d\left(X^2(t)\right)$ aplicando a fórmula de Itô na forma diferencial, integre e aplique o operador esperança).

c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} Var\left(R(t)\right).$

6.7 Aproximações numéricas

Muitas equações diferenciais estocásticas não podem ser resolvidas explicitamente. Por isso, são necessários métodos numéricos para obter aproximações das soluções. Considere-se a EDE:

$$dX_t = b\left(X_t\right)dt + \sigma\left(X_t\right)dB_t,$$

com condição inicial $X_0 = x$. Vamos definir uma sucessão de partições do intervalo $[0,T]$, onde cada partição é definida pelos pontos $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0,1,\ldots,n$ e o comprimento de cada subintervalo da partição é $\delta_n = \frac{T}{n}$

Vamos agora apresentar o método de Euler de diferenças finitas. Os valores exactos da solução são

$$X\left(t_i\right) = X\left(t_{i-1}\right) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b\left(X_s\right)ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma\left(X_s\right)dB_s. \tag{6.18}$$

A aproximação de Euler define-se por

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} b\left(X_s\right)ds \approx b\left(X\left(t_{i-1}\right)\right)\delta_n,$$
$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma\left(X_s\right)dB_s \approx \sigma\left(X\left(t_{i-1}\right)\right)\Delta B_i,$$

onde $\Delta B_i := B\left(t_i\right) - B\left(t_{i-1}\right).$ Finalmente, o esquema de Euler é definido por

$$X^{(n)}\left(t_i\right) = X^{(n)}\left(t_{i-1}\right) + b\left(X^{(n)}\left(t_{i-1}\right)\right)\delta_n + \sigma\left(X\left(t_{i-1}\right)\right)\Delta B_i, \tag{6.19}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Em cada intervalo (t_{i-1}, t_i), o valor de $X^{(n)}$ é obtido por interpolação linear.

O erro de aproximação é definido por

$$e_n := \sqrt{E\left[\left(X_T - X_T^{(n)}\right)^2\right]}. \tag{6.20}$$

Para o esquema de Euler, pode mostrar-se que

$$e_n^{Eul} \leq c\sqrt{\delta_n},$$

onde c é uma constante.

Como simular uma trajectória da solução usando o método de Euler? Basta aplicar o seguinte procedimento.

1. Simular os valores de n variáveis aleatórias com distribuição normal $N(0,1)$: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

2. Substituir ΔB_i em (6.19) por $\xi_i\sqrt{\delta_n}$ e determinar os valores de $X^{(n)}(t_i)$ usando o esquema por recorrência (6.19).

3. Em cada intervalo (t_{i-1}, t_i) determinar $X^{(n)}$ por interpolação linear.entre $X^{(n)}(t_{i-1})$ e $X^{(n)}(t_i)$.

Discutiremos agora um outro método de diferenças finitas - o método de Milstein. Para apresentar este método, é necessário aplicar a fórmula de Itô a $b(X_t)$ e a $\sigma(X_t)$, considerando $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\,ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[b(X(t_{i-1})) + \right. \\
&\left. + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(bb' + \frac{1}{2}b''\sigma^2\right)(X_r)\,dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma b')(X_r)\,dB_r\right] ds, \\
&\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\,dB_s = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\sigma(X(t_{i-1})) + \right. \\
&\left. + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(b\sigma' + \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)(X_r)\,dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\,dB_r\right] dB_s.
\end{aligned}$$

Exercício 6.14 *Prove esta igualdade.*

A partir da eq. (6.18), obtemos

$$X^{(n)}(t_i) - X^{(n)}(t_{i-1}) = b(X(t_{i-1}))\,\delta_n + \sigma(X(t_{i-1}))\,\Delta B_i + R_i.$$

Pode mostrar-se que o termo dominante de R_i é o integral estocástico duplo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma') (X_r) \, dB_r \right) dB_s,$$

sendo os outros termos de ordem mais baixa e desprezáveis. A aproximação de Milstein é

$$\begin{aligned} R_i &\approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma') (X_r) \, dB_r \right) dB_s \\ &\approx (\sigma\sigma') (X(t_{i-1})) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (B_s - B(t_{i-1})) \, dB_s \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} B_s dB_s - B(t_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2} \left[B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 - \delta_n \right] - B(t_{i-1}) (B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2} \left[(\Delta B_i)^2 - \delta_n \right], \end{aligned}$$

onde, para calcular $\int_{t_{i-1}}^{t_i} B_s dB_s$, se pode usar a fórmula de Itô aplicada a $f(B_t) = B_t^2$.

O esquema de Milstein é

$$\begin{aligned} X^{(n)}(t_i) &= X^{(n)}(t_{i-1}) + b\left(X^{(n)}(t_{i-1})\right) \delta_n + \sigma (X(t_{i-1})) \Delta B_i \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sigma\sigma') (X(t_{i-1})) \left[(\Delta B_i)^2 - \delta_n \right]. \end{aligned}$$

Pode mostrar-se que o erro da aproximação de Milstein é

$$e_n^{Mil} \leq c\delta_n.$$

6.8 Propriedade de Markov

As soluções de EDE's dizem-se processos de difusão. Seja $X = \{X_t, t \geq 0\}$ um processo de difusão (de dimensão n) que satisfaz a EDE:

$$dX_t = b(t, X_t) \, dt + \sigma(t, X_t) \, dB_t, \tag{6.21}$$

onde B é um movimento Browniano m-dimensional e b e σ satisfazem as condições do teroema de existência e unicidade.

Definição 6.15 *Diz-se que um processo $X = \{X_t, t \geq 0\}$ é um processo de Markov se $\forall s < t$, temos*

$$E\left[f\left(X_t\right)|X_r, r \leq s\right] = E\left[f\left(X_t\right)|X_s\right].$$

para qualquer função limitada e mensurável f definida em $\mathbb{R}^n$.

Em particular, se $C \subset \mathbb{R}^n$ e é mensurável, temos:

$$P\left[X_t \in C|X_r, r \leq s\right] = P\left[X_t \in C|X_s\right].$$

Essencialmente, a propriedade de Markov afirma que "os valores futuros de um processo dependem só do seu valor presente e não dos valores passados (se o valor presente for conhecido)". A lei de probabilidade dos processos de Markov é descrita pelas probabilidades de transição

$$P\left(C, t, x, s\right) := P\left(X_t \in C|X_s = x\right), \quad 0 \leq s < t.$$

$P\left(\cdot, t, x, s\right)$ é a lei de probabilidade de X_t condicionada a $X_s = x$. Se esta probabilidade condicionada tiver densidade, representamo-la por:

$$p\left(y, t, x, s\right).$$

Exemplo 6.16 *O movimento Browniano é um processo de Markov com probabilidades de transição:*

$$p\left(y, t, x, s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(t-s\right)}} \exp\left(-\frac{\left(x-y\right)^2}{2\left(t-s\right)}\right). \tag{6.22}$$

De facto

$$\begin{aligned}
&P\left[B_t \in C|\mathcal{F}_s\right] = P\left[B_t - B_s + B_s \in C|\mathcal{F}_s\right] \\
&= P\left[B_t - B_s + x \in C\right]|_{x=B_s} \\
&= P\left[B_t \in C|B_s = x\right],
\end{aligned}$$

onde se usaram as propriedades da esperança condicionada e o facto de $B_t - B_s$ ser independente de $\mathcal{F}_s$ e de B_s ser conhecido dada a "informação"$\mathcal{F}_s$ (ou seja, B_s é $\mathcal{F}_s$-mensurável).

Mas como $B_t - B_s + x$ tem dist. Normal com média x e variância $t - s$, então a densidade da probabilidade de transição é (6.22).

Vamos agora introduzir alguma notação útil. Representaremos por $\{X_t^{s,x}, t \geq s\}$ a solução da EDE (6.21) definida em $[s, +\infty)$ e com condição inicial $X_s^{s,x} = x$. Se $s = 0$, usamos a notação $X_t^{0,x} = X_t^x$.

Proposição 6.17 *Temos as seguintes propriedades*

- 1. Existe uma versão contínua (em todos os parâmetros s, t, x) do processo $\{X_t^{s,x}, 0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}^n\}$.

  2. Para qualquer $t \geq s$, temos

$$X_t^x = X_t^{s,X_s^x}. \tag{6.23}$$

Proof. Prova de (2): X_t^x satisfaz a EDE

$$X_t^x = X_s^x + \int_s^t b(u, X_u^x)\, du + \int_s^t \sigma(u, X_u^x)\, dB_u.$$

Por outro lado, $X_t^{s,y}$ satisfaz

$$X_t^{s,y} = y + \int_s^t b(u, X_u^{s,y})\, du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,y})\, dB_u.$$

Substituindo y por X_s^x obtemos que X_t^x e X_t^{s,X_s^x} são soluções da mesma EDE em $[s, +\infty)$ e com a mesmo condição inicial X_s^x. Logo, pelo teorema de existência e unicidade, a solução é única e $X_t^x = X_t^{s,X_s^x}$. ■

Teorema 6.18 *(propriedade de Markov dos processos de difusão) Seja f uma função limitada e mensurável em $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $0 \leq s \leq t$, temos*

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t^{s,x})]|_{x=X_s} \tag{6.24}$$

Proof. Por (6.23) e pelas propriedades da esperança condicionada, temos:

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t^{s,x})|\mathcal{F}_s] = E[f(X_t^{s,x})]|_{x=X_s},$$

porque $X_t^{s,x}$ é independente de $\mathcal{F}_s$ e X_s é conhecido a partir da "informação"$\mathcal{F}_s$ (i.e., X_s é $\mathcal{F}_s$-mensurável). Aplica-se a propriedade 7 da esperança condicionada. ■

Os processos de difusão são processos de Markov. As probabilidades de transição de um processo de difusão são dadas por

$$P(C, t, x, s) = P(X_t^{s,x} \in C).$$

Se um processo de difusão é homogéneo no tempo (os coeficientes b e σ não dependem de t) então a propriedade de Markov (6.24) pode escrever-se:

$$E[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = E\left[f\left(X_{t-s}^x\right)\right]|_{x=X_s}.$$

Exercício 6.19 *Calcule as probabilidades de transição do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média.*

Solução 6.20 *A EDE é*

$$dX_t = a\left(m - X_t\right)dt + \sigma dB_t.$$

A solução em $[s, +\infty)$, *com condição inicial* $X_s = x$, *é*

$$X_t^{s,x} = m + (x-m)\, e^{-a(t-s)} + \sigma e^{-at} \int_s^t e^{ar} dB_r.$$

Então, como $\left\{\int_s^t e^{ar} dB_r, t \geq s\right\}$ *é um processo Gaussiano com média e variância (ver exemplo em aula anterior), temos que*

$$E\left[X_t^{s,x}\right] = m + (x-m)\, e^{-a(t-s)},$$
$$\operatorname{Var}\left[X_t^{s,x}\right] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right).$$

A probabilidade de transição é

$$P\left(\cdot, t, x, s\right) = \textit{Distribuição de } X_t^{s,x}.$$

Logo, é uma distribuição normal com a média e a variância dadas acima.

6.9 Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

No integral estocástico de Itô para processos contínuos, quando definimos $\int_0^t u_s dB_s$ usando somas do tipo Riemann-Stieltjes, usamos sempre o valor do processo u no ponto t_{j-1} e assumimos que o processo é constante em $[t_{j-1}, t_j)$. Como consequência, o valor esperado do integral de Itô é nulo e a sua variância pode calcular-se usando a propriedade de isometria de Itô. Além disso, o integral de Itô indefinido é uma martingala. A desvantagem do integral de Itô é que na "regra da cadeia"(ou fórmula de Itô) aparece um termo de 2^a ordem (termo que não aparece no cálculo clássico).

O integral de Stratonovich $\int_0^T u_s \circ dB_s$ define-se como o limite em probabilidade da sucessão:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(u_{t_{i-1}} + u_{t_i}\right)\Delta B_i,$$

com $t_i = \frac{iT}{n}$. Coloca-se a questão: qual a relação entre o integral de Itô e o integral de Stratonovich?

Se u é um processo de Itô da forma

$$u_t = u_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \alpha_s dB_s. \tag{6.25}$$

então é possível mostrar que

$$\int_0^T u_s \circ dB_s = \int_0^T u_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s ds.$$

A "fórmula de Itô"para o integral estocástico de Stratonovich coincide com a regra da cadeia para o cáculo clássico. De facto, se u é um processo da forma (6.25) e

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s ds + \int_0^t u_s \circ dB_s$$

então pode mostrar-se que

$$df\left(X_t\right) = f'\left(X_t\right) \circ dX_t$$

Uma EDE no sentido de Itô pode ser transformada numa EDE no sentido de Stratonovich, usando a fórmula que relaciona ambos os integrais:

- EDE de Itô:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dB_s.$$

- EDE de Stratonovich equivalente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma\sigma'\right)\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) \circ dB_s.$$

- Isto, porque a decomposição de Itô de $\sigma\left(t, X_t\right)$ é

$$\sigma\left(t, X_t\right) = \sigma\left(0, X_0\right) + \int_0^t \left(\sigma' b - \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \left(\sigma\sigma'\right)\left(s, X_s\right) dB_s.$$

Capítulo 7

Relações entre EDE's e EDP's

7.1 Gerador ou operador infinitesimal de uma difusão

Considere uma difusão n-dimensional X que satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

onde B é um movimento Browniano m-dimensional. Assuma que b e σ satisfazem as condições do teorema de existência e unicidade de EDE's. Considere que $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to M\left(n, m\right)$, onde $M\left(n, m\right)$ é o conjunto de matrizes $n \times m$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definição 7.1 *O gerador ou operador infinitesimal associado à difusão X é o operador diferencial de 2^a ordem A definido por*

$$Ah\left(t, x\right) := \sum_{i=1}^{n} b_i\left(t, x\right) \frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sigma \sigma^T\right)_{i,j}\left(t, x\right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde h é uma função de classe $C^{1,2}$ definida em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

O operador infinitesimal é também designado por operador de Dynkin, operador de Itô ou "Kolmogorov backward operator". Veremos agora qual a relação entre a difusão X e o operador A. Pela fórmula de Itô, se $f\left(t, x\right)$ é uma função de classe $C^{1,2}$, então $f\left(t, X_t\right)$ é um processo de Itô com "diferencial":

$$df\left(t, X_t\right) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}\left(t, X_t\right) + Af\left(t, X_t\right) \right\} dt + \left[\nabla_x f\left(t, X_t\right)\right] \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \quad (7.1)$$

onde o gradiente se define como:

$$\nabla_x f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

Note-se que se

$$E \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)\, \sigma_{i,j}(t, X_t)\right)^2 ds < \infty, \tag{7.2}$$

para todo o $t > 0$ e para todo i, j, então os integrais estocásticos em (7.1) estão bem definidos e são martingalas, pelo que

$$M_t = f(t, X_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + Af(s, X_s)\right) ds$$

é uma martingala. Uma condição suficiente para que (7.2) seja satisfeita é que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s)$ tenham crescimento linear, i.e.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x)\right| \leq C(1 + |x|).$$

7.2 Fórmulas de Feynman-Kac

A equação diferencial parcial

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + AF(t, x) &= 0, \\ F(T, x) &= \Phi(x) \end{aligned} \tag{7.3}$$

é uma EDP parabólica com condição terminal (em T). A EDP anterior também se pode escrever como (supondo $n = 1$, para simplificar a notação)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + b(t, x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= 0, \\ F(T, x) &= \Phi(x). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Em vez de resolver a EDP analiticamente vamos tentar obter a solução usando uma "fórmula de representação estocástica". Suponhamos que existe uma solução F. Fixemos t e x e definamos o processo X em $[t, T]$ como a solução da EDE

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s, X_s)\, ds + \sigma(s, X_s)\, dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

O operador infinitesimal associado a X é

$$A = b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

que é exactamente o operador que aparece na EDP (7.3) ou (7.4). Aplicando a fórmula de Itô a F, temos (ver (7.1))

$$\begin{aligned} F(T,X_T) = F(t,X_t) &+ \int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + AF(s,X_s)\right) ds \\ &+ \int_t^T \sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\, dB_s. \end{aligned}$$

Mas $\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + AF(s,X_s) = 0$ e aplicando o valor esperado (considerando o valor inicial $X_t = x$), obtemos

$$E_{t,x}[F(T,X_T)] = E_{t,x}[F(t,X_t)],$$

supondo que o integral estocástico está bem definido e portanto o seu valor esperado é zero. Como, pelos valores na fronteira, $E_{t,x}[F(T,X_T)] = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right]$ e $E_{t,x}\left[F\left(t,X_t^{t,x}\right)\right] = F(t,x)$, temos

$$F(t,x) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

sendo esta a representação estocástica da solução da EDP (7.4).

Proposição 7.2 *(fórmula de Feynman-Kac) Suponhamos que F é solução do problema de valores na fronteira (7.4). Suponhamos que $\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)$ é um processo em L^2 (i.e. $E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\sigma_{i,j}(t,X_t)\right)^2 ds < \infty$). Então*

$$F(t,x) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Proposição 7.3 *(fórmula de Feynman-Kac) Suponhamos que F é solução do problema (7.3). Suponhamos que $E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\sigma_{i,j}(t,X_t)\right)^2 ds < \infty$, para todo o $t > 0$ e para todo i,j. Então*

$$F(t,x) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Considere-se agora uma função $q(x)$ contínua e limitada inferiormente, com $q \in C(\mathbb{R}^n)$ e a equação diferencial parcial (EDP)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + AF(t,x) - q(x)F(t,x) = 0, \qquad (7.5)$$
$$F(T,x) = \Phi(x)$$

com condição terminal (em T). A EDP anterior também se pode escrever como (supondo $n = 1$, para simplificar a notação)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - q(x)F(t,x) = 0, \qquad (7.6)$$
$$F(T,x) = \Phi(x).$$

Em vez de resolver a EDP analiticamente vamos tentar obter a solução usando uma "fórmula de representação estocástica". Suponhamos que existe uma solução F. Fixemos t e x e definamos o processo X em $[t,T]$ como a solução da EDE

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

O operador infinitesimal associado a X é

$$A = b(t,x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

que é exactamente o operador que aparece na EDP (7.5) ou (7.6). Aplicando a fórmula de Itô a $g(t,X_t) = \exp\left(-\int_0^t q(X_s)\,ds\right)F(t,X_t)$ e integrando entre t e T, temos

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\int_0^T q(X_s)\,ds\right)F(T,X_T) = \exp\left(-\int_0^t q(X_s)\,ds\right)F(t,X_t) + \\ &+ \int_t^T e^{-\int_0^s q(X_r)dr}\left(\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + AF(s,X_s) - q(X_s)F(s,X_s)\right)ds \\ &+ \int_t^T \exp\left(-\int_0^s q(X_r)\,dr\right)\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\,dB_s. \end{aligned}$$

Mas $\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + AF(s,X_s) - q(X_s)F(s,X_s) = 0$ e aplicando o valor esperado (considerando o valor inicial $X_t = x$), obtemos

$$E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q(X_s)\,ds\right)F(T,X_T)\right] = E_{t,x}\left[F(t,X_t)\right],$$

supondo que o integral estocástico está bem definido e portanto o seu valor esperado é zero. Como

$$E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s\right)ds\right)F\left(T,X_T\right)\right]=E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s\right)ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right]$$

e $E_{t,x}\left[F\left(t,X_t^{t,x}\right)\right]=F\left(t,x\right)$, temos

$$F\left(t,x\right)=E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s^{t,x}\right)ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

sendo esta a representação estocástica da solução da EDP (7.5) ou (7.6).

Proposição 7.4 *(fórmula de Feynman-Kac 2) Seja F solução do problema (7.5) ou (7.6). Considere-se que $\sigma\left(s,X_s\right)\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,X_s\right)$ é um processo em $L^2_{a,T}$ (i.e. $E\int_0^T\left[\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,X_s\right)\sigma\left(s,X_s\right)\right]^2ds<\infty$). Então*

$$F\left(t,x\right)=E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s^{t,x}\right)ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$\begin{aligned}dX_s&=b\left(s,X_s\right)ds+\sigma\left(s,X_s\right)dB_s,\\X_t&=x.\end{aligned}$$

Nota: Considerando que $q(x)$ é contínua e limitada inferiormente, uma condição suficiente para que $E\int_0^T\left[\exp\left(-\int_0^s q\left(X_r\right)dr\right)\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,X_s\right)\sigma\left(s,X_s\right)\right]^2ds<\infty$ é que a derivada $\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,x\right)$ tenha crescimento linear, i.e.

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,x\right)\right|\leq C\left(1+|x|\right).$$

7.3 Relação entre a equação do calor e o movimento Browniano

Seja f uma função contínua e com crescimento polinomial. A função

$$u\left(t,x\right)=E\left[f\left(B_t+x\right)\right]$$

satisfaz a equação do calor

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\u\left(0,x\right)&=f\left(x\right).\end{aligned}$$

De facto, como B_t tem distribuição $N(0,t)$, temos que

$$E[f(B_t+x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} dy,$$

e a função $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$, para cada y fixo, satisfaz a equação do calor $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. A função $x \to u(t,x)$ representa a distribuição de temperaturas numa barra de comprimento infinito, supondo que o perfil inicial de temperaturas é dado pela função $f(x)$.

7.4 A equação Backward de Kolmogorov

Consideremos uma difusão homgénea no tempo X que satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t, \\ X_0 &= x. \end{aligned}$$

O gerador infinitesimal associado não depende do tempo e é dado por

$$Af(x) := \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \left(\sigma\sigma^T\right)_{i,j}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \tag{7.7}$$

Aplicando a fórmula de Itô a $f(X_s)$, obtemos

$$df(X_s) = Af(X_s)\,ds + [\nabla_x f(X_s)]\,\sigma(X_s)\,dB_s.$$

e aplicando o valor esperado

$$E[f(X_t^x)] = f(x) + \int_0^t E[Af(X_s)]\,ds.$$

Considere-se a função

$$u(t,x) = E[f(X_t^x)].$$

Por (**??**), a função u é diferenciável em t e satisfaz a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = E[Af(X_t^x)].$$

A expressão $E[Af(X_t^x)]$ pode representar-se como função de u. Para tal, vamos introduzir o domínio do operador infinitesimal.

Definição 7.5 *O domínio D_A do gerador infinitesimal A é o conjunto de funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que o limite seguinte existe para todo o $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$Af(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{E[f(X_t^x)] - f(x)}{t}. \tag{7.8}$$

Por (**??**), temos que $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subset D_A$ e se $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, o limite (7.8) é igual a Af dado por (7.7). A função $u(t,x)$ satisfaz uma EDP - a equação "Backward"de Kolmogorov:

Teorema 7.6 *Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$.*

a) Seja $u(t,x) = E[f(X_t^x)]$. Então $u(t,\cdot) \in D_A$ e satisfaz a equação (EDP "backward"de Kolmogorov)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \tag{7.9}$$
$$u(0,x) = f(x).$$

b) Se $w \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ é uma função limitada que satisfaz a EDP (7.9), então

$$w(t,x) = E[f(X_t^x)].$$

Proof. a) Basta calcular o limite

$$Au = \lim_{r \searrow 0} \frac{E[u(t,X_r^x)] - u(t,x)}{r}$$

Pela propriedade de Markov, temos

$$\begin{aligned} E[u(t,X_r^x)] &= E\left[E[f(X_t^y)]|_{y=X_r^x}\right] \\ &= E\left[f\left(X_{t+r}^x\right)\right] = u(t+r,x). \end{aligned}$$

Então, como $t \to u(t,x)$ é diferenciável, temos

$$\begin{aligned} \lim_{r \searrow 0} \frac{E[u(t,X_r^x)] - u(t,x)}{r} &= \lim_{r \searrow 0} \frac{u(t+r,x) - u(t,x)}{r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

b) Considere-se o processo de dimensão $n+1$:

$$Y_t = (s-t, X_t^x).$$

A fórmula de Itô aplicada a $w(Y_t)$, resulta em

$$w(Y_t) = w(s,x) + \int_0^t \left(Aw - \frac{\partial w}{\partial r} \right) (s-r, X_r^x)\, dr + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i} (s-r, X_r^x)\, \sigma_{i,j}(X_r^x)\, dB_r^j$$

Como $Aw = \frac{\partial w}{\partial t}$, obtemos

$$w(Y_t) = w(s,x) + \int_0^t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial w}{\partial x_i} (s-r, X_r^x)\, \sigma_{i,j}(X_r^x)\, dB_r^j$$

Pretendemos agora aplicar o valor esperado, mas como não foi imposta nenhuma condição sobre o crescimento das derivadas parciais de w, não sabemos se a esperança dos integrais estocásticos é zero.

Por isso, introduzimos um tempo de paragem τ_R para $R > 0$, dado por

$$\tau_R := \inf\{t > 0 : |X_t^x| \geq R\}.$$

Se $r \leq \tau_R$, o processo $\frac{\partial w}{\partial x_i}(s-r, X_r^x)\, \sigma_{i,j}(X_r^x)$ é limitado e os integrais estocásticos estão bem definidos e a sua esperança é zero. Logo,

$$E[w(Y_{t\wedge\tau_R})] = w(s,x)$$

e fazendo $R \to \infty$, temos para todo $t \geq 0$:

$$E[w(Y_t)] = w(s,x).$$

Finalmente, com $s = t$ e usando $w(0,x) = f(x)$, temos

$$w(s,x) = E[w(Y_s)] = E[w(0, X_s^x)] = E[f(X_s^x)].$$

De forma análoga, pode provar-se o seguinte teorema (ver [10]). ■

Teorema 7.7 *Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $q \in C(\mathbb{R}^n)$, com q limitada inferiormente.*

a) Seja

$$v(t,x) = E\left[\exp\left(-\int_0^t q(X_s^x)\, ds \right) f(X_t^x) \right]$$

. Então $v(t,\cdot) \in D_A$ para cada t e satisfaz a equação EDP

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= Av - qv, \\ v(0,x) &= f(x). \end{aligned} \tag{7.10}$$

b) Se $w \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ é uma função limitada em cada $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ e que satisfaz a EDP (7.10), então

$$w(t,x) = v(t,x).$$

Na demonstração do teorema anterior foi necessário recorrer ao conceito de tempo de paragem ("stopping time") relativamente a uma filtração $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, que é uma variável aleatória

$$\tau : \Omega \to [0, +\infty]$$

tal que, para todo o $t \geq 0$, temos que $\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Podemos decidir se "paramos ou não"antes de um instante t a partir da informação contida em $\mathcal{F}_t$.

Exemplo 7.8 *O tempo de chegada de um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, t \geq 0\}$ a um nível a, i.e.*

$$\tau_a := \inf\{t > 0 : X_t = a\}$$

é um tempo de paragem. De facto, temos que

$$\{\tau \leq t\} = \left\{\sup_{0 \leq s \leq t} X_s \geq a\right\} = \left\{\sup_{0 \leq s \leq t, s \in \mathbb{Q}} X_s \geq a\right\} \in \mathcal{F}_t$$

Podemos associar a um tempo de paragem τ a σ-álgebra $\mathcal{F}_\tau$ formada pelos conjuntos G tais que

$$G \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Os tempos de paragem satisfazem as propriedades (ver [9]):

1. Se $\{M_t, t \in [0, T]\}$ é uma martingala contínua e τ é um tempo de paragem limitado por T, então

$$E[M_T | \mathcal{F}_\tau] = M_\tau.$$

2. Se $u \in L^2_{a,T}$ e τ é um tempo de paragem limitado por T, o processo $u\mathbf{1}_{[0,\tau]}$ também pertence a $L^2_{a,T}$ e temos que

$$\int_0^T u\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)\, dB_t = \int_0^\tau u(t)\, dB_t$$

Capítulo 8

Teorema de Girsanov

O teorema de Girsanov diz-nos, na sua versão mais simples, que o movimento Browniano com deriva: $\widetilde{B}_t = B_t + \lambda t$, pode ser visto como um movimento Browniano standard se mudarmos a medida de probabilidade. Em termos mais gerais, o teorema de Girsanov diz-nos que se mudarmos o coeficiente de deriva de um processo de Itô então a lei do processo não muda radicalmente. A lei do novo processo de Itô será absolutamente contínua relativamente à lei do processo original e podemos calcular explicitamente a derivada de Radon-Nikodym.

8.1 Mudanças de medida de probabilidade

Suponha que $L \geq 0$ é uma variável aleatória de média 1 definida no esp. de probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então

$$Q(A) = E[\mathbf{1}_A L]$$

define uma nova medida de probabilidade. É claro que $Q(\Omega) = E[L] = 1$. E $Q(A) = E[\mathbf{1}_A L]$ é equivalente a

$$\int_\Omega \mathbf{1}_A dQ = \int_\Omega \mathbf{1}_A L dP.$$

Diz-se que L é a densidade de Q relativamente a P e escreve-se

$$\frac{dQ}{dP} = L.$$

L também se diz a derivada de Radon-Nikodym de Q relativamente a P.

O valor esperado de uma v.a. X definida no esp. de probab. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ calcula-se pela fórmula

$$E_Q[X] = E[XL].$$

A medida de probabilidade Q é absolutamente contínua relativamente a P, o que significa que

$$P(A) = 0 \Longrightarrow Q(A) = 0.$$

Se a variável aleatória L é estritamente positiva ($L > 0$), as probabilidades P e Q são equivalentes (ou seja, mutuamente absolutamente contínuas), o que significa que

$$P(A) = 0 \Longleftrightarrow Q(A) = 0.$$

8.2 Teorema de Girsanov

Seja X uma v.a. com distribuição $N(m, \sigma^2)$. Existe uma medida de probab. Q em relação à qual X tenha distribuição $N(0, \sigma^2)$?

Considere a v.a.

$$L = \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}X + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right).$$

É fácil verificar que $E[L] = 1$. Basta considerar a densidade da distribuição normal $N(m, \sigma^2)$ e temos que

$$\begin{aligned} E[L] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{m}{\sigma^2}x + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1. \end{aligned}$$

Suponha que a medida de probabilidade Q tem densidade L em relação a P. Então, no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, a v.a. X tem a função característica:

$$\begin{aligned} E_Q\left[e^{itX}\right] &= E\left[e^{itX}L\right] \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(itx - \frac{m}{\sigma^2}x + \frac{m^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(itx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

Conclusão: X tem distribuição $N(0, \sigma^2)$. Para a forma geral da função característica de uma distribuição normal ver, por exemplo, o apêndice de [10] sobre distribuições normais.

Seja $\{B_t, t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Fixemos um número real λ e consideremos a martingala:

$$L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right). \tag{8.1}$$

Exemplo 8.1 *Prove que o processo estocástico* $\{L_t, t \in [0,T]\}$ *é uma martingala positiva com esperança 1 e que satisfaz a EDE:*

$$\begin{aligned} dL_t &= -\lambda L_t dB_{t,} \\ L_0 &= 1. \end{aligned}$$

A variável aleatória $L_T = \exp\left(-\lambda B_T - \frac{\lambda^2}{2}T\right)$ é uma densidade no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, pela qual se define a nova medida de probabilidade

$$Q(A) = E\left[\mathbf{1}_A L_T\right],$$

para qualquer $A \in \mathcal{F}_T$.

- Como $\{L_t, t \in [0,T]\}$ é uma martingala, então a v.a. $L_t = \exp\left(-\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$ é uma densidade no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ e neste espaço a medida de probab. Q tem precisamente a densidade L_t.

- De facto, se $A \in \mathcal{F}_t$, temos que:

$$\begin{aligned} Q(A) &= E\left[\mathbf{1}_A L_T\right] = E\left[E\left[\mathbf{1}_A L_T | \mathcal{F}_t\right]\right] \\ &= E\left[\mathbf{1}_A E\left[L_T | \mathcal{F}_t\right]\right] = E\left[\mathbf{1}_A L_t\right], \end{aligned}$$

  onde se aplicaram as propriedades da esperança condicionada e a propriedade de martingala de $\{L_t, t \in [0,T]\}$.

Teorema 8.2 *(Teorema de Girsanov I): No espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$*, onde* Q *é definida por* $Q(A) = E\left[\mathbf{1}_A L_T\right]$*, o processo estocástico*

$$\widetilde{B}_t = B_t + \lambda t$$

é um movimento Browniano.

Antes de provar o teorema de Girsanov, precisamos do seguinte Lema.

Lema 8.3 *Suponha que* X *é uma v.a. real e que* $\mathcal{G}$ *é uma* σ*-álgebra tal que:*

$$E\left[e^{iuX} | \mathcal{G}\right] = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}.$$

Então, a variável aleatória X *é independente da* σ*-álgebra* $\mathcal{G}$ *e tem uma dist. normal* $N(0, \sigma^2)$*.*

Ver a demonstração do Lema em [9], págs. 63-64.

Proof. (Teorema de Girsanov) É suficiente mostrar que em $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, o incremento $\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s$, com $s < t \leq T$, é independente de $\mathcal{F}_s$ e tem distribuição normal $N(0, t-s)$. Tendo em conta o Lema anterior, isto é consequência da seguinte relação:

$$E_Q\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right] = Q(A)\, e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)}, \tag{8.2}$$

para todo $s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ e $u \in \mathbb{R}$. De facto, se (8.2) se verificar então, por definição da esperança condicionada e pelo Lema anterior, temos que $\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)$ é independente de $\mathcal{F}_s$ e tem distribuição normal $N(0, t-s)$.

Prova da igualdade (8.2):

$$\begin{aligned}
&E_Q\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)}\right] = E\left[\mathbf{1}_A e^{iu\left(\widetilde{B}_t - \widetilde{B}_s\right)} L_t\right] \\
&= E\left[\mathbf{1}_A e^{iu(B_t - B_s) + iu\lambda(t-s) - \lambda(B_t - B_s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} L_s\right] \\
&= E\left[\mathbf{1}_A L_s\right] E\left[e^{(iu-\lambda)(B_t - B_s)}\right] e^{iu\lambda(t-s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\
&= Q(A) e^{\frac{(iu-\lambda)^2}{2}(t-s) + iu\lambda(t-s) - \frac{\lambda^2}{2}(t-s)} \\
&= Q(A) e^{-\frac{u^2}{2}(t-s)},
\end{aligned}$$

onde se usou a definição de E_Q e de L_t, a independência de $(B_t - B_s)$ de L_s e A e a definição de Q. ■

8.3 Teorema de Girsanov - versão geral

Teorema 8.4 *(Teorema de Girsanov II): Seja $\{\theta_t, t \in [0, T]\}$ um processo estocástico adaptado que satisfaz a condição de Novikov:*

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \theta_t^2 dt\right)\right] < \infty. \tag{8.3}$$

Então, o processo estocástico

$$\widetilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$$

é um movimento Browniano.relativamente à medida Q definida por $Q(A) = E[\mathbf{1}_A L_T]$, onde

$$L_t = \exp\left(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right).$$

Note-se que L_t satisfaz a EDE linear

$$L_t = 1 - \int_0^t \theta_s L_s dB_s.$$

Para que o processo L_t seja uma densidade é necessário que $E[L_t] = 1$ e a condição (8.3) é suficiente para garantir que $E[L_t] = 1$. A segunda versão do teorema de Girsanov generaliza a primeira versão. Note-se que com $\theta_t \equiv \lambda$, voltamos a obter a versão anterior.

8.4 Modelos de mercados financeiros

8.5 O modelo de Black-Scholes

As equações diferenciais que definem o modelo de Black-Scholes são as seguintes:

$$dB(t) = rB(t)\,dt, \tag{8.4}$$

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t, \tag{8.5}$$

onde r, α e σ são constantes. Representa-se por $B(t)$ o preço de um activo sem risco (obrigação ou depósito bancário) - é uma função determinista, S_t é o processo de preço de um activo com risco (acção ou índice) e é um processo estocástico, $\overline{W}_t$ é um movimento Browniano standard relativamente à medida de probabilidade original P, r é a taxa de juro sem risco, α é a taxa de rendibilidade média do activo com risco e σ é a volatilidade do activo com risco. Já sabemos que a solução de (8.5) é o movimento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \overline{W}_t\right).$$

Consideremos um direito contingente (por exemplo, um derivado financeiro), com payoff da forma

$$\chi = \Phi(S(T)). \tag{8.6}$$

Assume-se que este derivado financeiro pode ser negociado no mercado e que o seu processo de preço é da forma:

$$\Pi(t) = F(t, S_t), \quad t \in [0, T], \tag{8.7}$$

onde F é uma função diferenciável de classe $C^{1,2}$. Aplicando a fórmula de Itô a (8.20) e considerando (8.5), obtemos

$$\begin{aligned} dF(t,S_t) &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t)\right) dt \\ &\quad + \left(\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)\right) d\overline{W}_t. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} F(t,S_t) &= F(0,S_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(r,S_r) + AF(r,S_r)\right) dr \\ &\quad + \int_0^t \left(\sigma S_r \frac{\partial F}{\partial x}(r,S_r)\right) d\overline{W}_r, \end{aligned}$$

onde

$$Af(t,x) = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

é o operador infinitesimal associado à difusão S_t com EDE (8.5). Também podemos escrever:

$$d\Pi(t) = \alpha_\Pi(t)\,\Pi_t dt + \sigma_\Pi(t)\,\Pi_t d\overline{W}_t, \tag{8.8}$$

onde

$$\alpha_\Pi(t) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t)\right)}{F(t,S_t)}, \tag{8.9}$$

$$\sigma_\Pi(t) = \frac{\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)}{F(t,S_t)}. \tag{8.10}$$

Consideramos uma carteira ou portfolio (a_t, b_t), onde:

- a_t é o número de acções ou unidades do activo com risco no portfolio no instante t.
- b_t é o número de obrigações (ou número de unidades do activo sem risco) no instante t.

Se a_t é negativo, então é porque temos posição curta em acções (acções vendidas "a descoberto"). Se b_t é negativo, então é porque temos posição curta no activo sem risco. O valor da carteira no instante t é

$$V(t) = a_t S_t + b_t B_t.$$

Supõe-se que a carteira é auto-financiada,.isto é, que

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t.$$

Uma carteira auto-financiada é uma carteira para a qual a variação do seu valor é causada apenas pela variação do preço dos activos. Também podemos considerar uma carteira com outros dois activos: o activo com risco subjacente e o activo derivado. Sejam $u_S(t)$ e $u_\Pi(t)$ as quantidades relativas de cada um destes activos na carteira $(u_S(t) + u_\Pi(t) = 1)$. A dinâmica do valor desta carteira (que também se supõe auto-financiada) é dada por

$$dV_t = u_S(t) V_t \frac{dS_t}{S_t} + u_\Pi(t) V_t \frac{d\Pi_t}{\Pi_t}.$$

Substituindo (8.5) e (8.8), obtemos

$$\begin{aligned} dV_t = {} & V_t \left[u_S(t)\alpha + u_\Pi(t)\alpha_\Pi(t)\right] dt \\ & + V\left[u_S(t)\sigma + u_\Pi(t)\sigma_\Pi(t)\right] d\overline{W}_t. \end{aligned}$$

8.6 Ausência de arbitragem e equação de Black-Scholes

Vamos definir a carteira $(u_S(t), u_\Pi(t))$ de forma a que a parte estocástica de dV_t seja nula. Sejam $u_S(t), u_\Pi(t)$ soluções do sistema de equações lineares

$$\begin{cases} u_S(t) + u_\Pi(t) = 1, \\ u_S(t)\sigma + u_\Pi(t)\sigma_\Pi(t) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem a solução:

$$\begin{aligned} u_S(t) &= \frac{\sigma_\Pi(t)}{\sigma_\Pi(t) - \sigma}, \\ u_\Pi(t) &= \frac{-\sigma}{\sigma_\Pi(t) - \sigma}. \end{aligned}$$

Substituindo (8.10) nas expressões, obtemos:

$$u_S(t) = \frac{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)}{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) - F(t, S_t)}, \tag{8.11}$$

$$u_\Pi(t) = \frac{-F(t, S_t)}{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) - F(t, S_t)}. \tag{8.12}$$

Com esta carteira, temos (valor da carteira sem diferencial estocástico):

$$dV_t = V_t \left[u_S(t)\,\alpha + u_\Pi(t)\,\alpha_\Pi(t)\right] dt. \tag{8.13}$$

Uma oportunidade de arbitragem num mercado financeiro é uma carteria auto-financiada h tal que:

$$\begin{aligned} V^h(0) &= 0, \\ V^h(T) &> 0 \quad q.c. \end{aligned}$$

Uma oportunidade de arbitragem é uma possibilidade de obter um lucro positivo a partir do "nada"com probabilidade 1.

O princípio de ausência de arbitragem diz basicamente o seguintes: dado um derivado com preço $\Pi(t)$, consideramos que $\Pi(t)$ é tal que não há oportunidades de arbitragem no mercado.

Proposição 8.5 *Se um portfolio autofinanciado h é tal que o valor do portfolio tem dinâmica*

$$dV^h(t) = k(t)\,V^h(t)\,dt,$$

onde $k(t)$ é um processo adaptado, então temos que ter $k(t) = r$ para todo o t, ou existirão oportunidades de arbitragem.

Para mais detalhes sobre o princípio de ausência de arbitragem, recomenda-se a consulta de [1].

Pelo princípio de ausência de arbitragem temos, a partir de (8.13), que

$$u_S(t)\,\alpha + u_\Pi(t)\,\alpha_\Pi(t) = r \tag{8.14}$$

Substituindo (8.9), (8.11) e (8.12) na condição de não arbitragem (8.14), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) - rF(t, S_t) = 0.$$

Além disso, é claro que na maturidade ou data de vencimento do derivado, temos

$$\Pi(T) = F(T, S_T) = \Phi(S(T)) \tag{8.15}$$

Podemos portanto enunciar o teorema seguinte.

Teorema 8.6 *(Eq. de Black-Scholes): Assuma que o mercado é especificado pelas eqs. (8.4)-(8.5) e que queremos avaliar um derivado com payoff* *da forma (8.6). Então, a única função de preço da forma (8.20) que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução F do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio $[0,T]\times\mathbb{R}^+$:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x)+rx\frac{\partial F}{\partial x}(t,x)+\frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x)-rF(t,x)=0, \qquad (8.16)$$
$$F(T,x)=\Phi(x).$$

Note-se que para defuzir a Equação de Black-Scholes (8.16), assumimos que o preço do derivado é da forma $\Pi(t)=F(t,S_t)$ e que existe um mercado para o derivado. Acontece que para derivados negociados "over the counter"(OTC), esse não é normalmente o caso. Para resolver este problema, veremos agora como deduzir a equação (8.16) sem considerar estas hipóteses.

Considere-se a carteira $(h^0(t),h^*(t))$ onde $h^0(t)$ é número de obrigações (ou número de unidades do activo sem risco) e $h^*(t)$ é o número de acções no instante t. O valor da carteira no instante t é

$$V^h(t)=h^0(t)B_t+h^*(t)S_t.$$

Supõe-se que a carteira é auto-financiada, isto é que

$$dV_t^h=h^0(t)dB_t+h^*(t)dS_t.$$

Na forma integral, temos

$$\begin{aligned}V_t^h&=V_0+\int_0^t h^*(s)dS_s+\int_0^t h^0(s)dB_s\\&=V_0+\int_0^t\left(\alpha h^*(s)S_s+rh^0(s)B_s\right)ds+\sigma\int_0^t h^*(s)S_s d\overline{W}_s. \qquad (8.17)\end{aligned}$$

Assuma-se que o direito contingente (ou derivado financeiro) tem payoff da forma:

$$\chi=\Phi(S(T)). \qquad (8.18)$$

e é replicável pelo portfolio $h=(h^0(t),h^*(t))$. Isto é, assume-se $V_T^h=\chi=\Phi(S(T))$ q.c. Então, o único processo de preço compatível com o princípio de ausência de arbitragem é

$$\Pi(t)=V_t^h,\quad t\in[0,T]. \qquad (8.19)$$

Assumimos ainda que

$$\Pi(t)=V_t^h=F(t,S_t). \qquad (8.20)$$

onde F é uma função diferenciável de classe $C^{1,2}$. Aplicando a fórmula de Itô a (8.20) e considerando (8.5), obtemos

$$\begin{aligned} dF(t,S_t) &= \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t)\right) dt \\ &\quad + \left(\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)\right) d\overline{W}_t. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} F(t,S_t) &= F(0,S_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(s,S_s) + AF(s,S_s)\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\sigma S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s)\right) d\overline{W}_s, \end{aligned} \tag{8.21}$$

onde

$$Af(t,x) = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

é o gerador infinitesimal associado à difusão S_t com EDE (8.5). Comparando (8.17) e (8.21), temos que

$$\begin{aligned} \sigma h^*(s) S_s &= \sigma S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s), \\ \alpha h^*(s) S_s + r h^0(s) B_s &= \frac{\partial F}{\partial t}(s,S_s) + AF(s,S_s). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s) &= h^*(s), \\ \frac{\partial F}{\partial t}(s,S_s) + r S_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,S_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,S_s) - rF(s,S_s) &= 0. \end{aligned}$$

Temos então:

- Uma carteira h com valor $V_t^h = F(t,S_t)$, constituída à custa de activos com risco de preço S_t e de activos sem risco com preço B_t.

- A carteira h replica em cada instante t o direito contingente (ou derivado) χ. e
$$\Pi(t) = V_t^h = F(t,S_t).$$

- Em particular:
$$F(T,S_T) = \Phi(S(T)) = \text{Payoff}.$$

A carteira deve ser continuamente actualizada com aquisição (ou venda) de $h^*(t)$ shares do activo com risco e $h^0(t)$ unidades do activo sem risco, onde

$$\begin{aligned} h^*(t) &= \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t), \\ h^0(t) &= \frac{V_t^h - h^*(t) S_t}{B_t} = \frac{F(t, S_t) - h^*(t) S_t}{B_t}. \end{aligned}$$

A função de preço do derivado satisfaz a equação diferencial parcial (equação de Black-Scholes)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + r S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) - rF(t, S_t) = 0.$$

Teorema 8.7 *(Eq. de Black-Scholes): Assuma que o mercado é especificado pelas eqs. (8.4)-(8.5) e que queremos avaliar um derivado com payoff da forma (8.6). Então, a única função de preço que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução F do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0, \\ F(T, x) = \Phi(x). \end{aligned} \qquad (8.22)$$

A equação de Black-Scholes pode ser resolvida por via analítica ou por via probabílista. Aplicando a fórmula de Feynman-Kac, temos o seguinte resultado.

Proposição 8.8 *(Fórmula de Feynman-Kac): Assuma que F é solução do problema de valores na fronteira*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x) \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0, \\ F(T, x) = \Phi(x). \end{aligned} \qquad (8.23)$$

Assuma que $\sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)$ é um processo em L^2 (i.e. $E \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) \sigma(s, X_s) \right)^2 ds < \infty$). Então

$$F(t, x) = e^{-r(T-t)} E_{t,x}[\Phi(X_T)],$$

onde X satisfaz

$$\begin{aligned} dX_s &= \mu(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Feynman-Kac da proposição anterior à eq. (8.22), obtemos:

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} E_{t,x}\left[\Phi(X_T)\right], \tag{8.24}$$

onde X é um processo estocástico com dinâmica:

$$\begin{aligned} dX_s &= rX_s ds + \sigma X_s d\overline{W}_s, \\ X_t &= x. \end{aligned} \tag{8.25}$$

Note-se que o processo X não é o nosso processo S, pois o "drift"de X é rX e não αX. Ou seja, S tem como taxa local de rendibilidade α, enquanto X tem como taxa local de rendibilidade a taxa de juro sem risco r. A ideia agora é "passar"do processo X para o processo S aplicando o teorema de Girsanov.

8.7 A medida de martingala e a avaliação neutra face ao risco

Denotemos por P a medida de probabilidade original (medida de probabilidade "objectiva"). A dinâmica-P do processo S é a dada em (8.5). Note-se que (8.5) é equivalente a

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\alpha - r}{\sigma} dt + d\overline{W}_t \right) \\ &= rS_t dt + \sigma S_t d \underbrace{\left(\frac{\alpha - r}{\sigma} t + \overline{W}_t \right)}_{W_t}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Girsanov, existe uma medida de probabilidade Q tal que no espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}_T, Q)$, o processo

$$W_t := \frac{\alpha - r}{\sigma} t + \overline{W}_t$$

é um movimento Browniano e S tem a dinâmica (sob Q):

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{8.26}$$

Considere-se a notação seguinte: E denota o valor esperado sob a medida original P, E^Q denota o valor esperado sob a nova medida Q (medida resultante da aplicação do teorema de Girsanov), $\overline{W}_t$ denota o movimento

Browniano original (sob a medida P) e W_t denota o movimento Browniano sob a medida Q.

Voltando a (8.24) e (8.25), tendo em conta que sob a medida Q as equações (8.25) e (8.26) são as mesmas, podemos representar a solução da Equação de Black-Scholes por

$$F(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right],$$

onde a dinâmica de S sob a medida Q é

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Podemos enunciar finalmente o teorema que nos dá uma fórmula de avaliação do direito contingente em termos da nova medida Q.

Teorema 8.9 *O preço (na ausência de arbitragem) do direito contingente $\Phi(S_T)$ é dado pela fórmula*

$$F(t,S_t) = e^{-r(T-t)} E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right], \tag{8.27}$$

onde a dinâmica de S sob a medida Q é

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

No modelo de Black-Scholes, o coeficiente de difusão σ pode depender de t e S - função $\sigma(t,S_t)$ - os cálculos seriam análogos nessa situação aos que acabamos de efectuar.

A medida Q designa-se por medida equivalente de martingala. A razão para esta terminologia tem a ver com o facto de que o processo descontado

$$\widetilde{S}_t := \frac{S_t}{B_t}$$

ser uma Q-martingala (martingala sob a medida Q). De facto,

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} &= e^{-rt}S_t = e^{-rt}S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\overline{W}_t\right) \\ &= S_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right)\end{aligned}$$

é uma martingala.

8.8 Fórmula de Black-Scholes

Calculando explicitamente o preço do derivado, temos

$$\begin{aligned}
e^{r(T-t)}F(t,s) &= E^Q_{t,s}\left[\Phi(S_T)\right] \\
&= E^Q_{t,s}\left[\Phi\left(s\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\left(W_T-W_t\right)\right)\right)\right] \\
&= E^Q\left[\Phi\left(se^Z\right)\right],
\end{aligned}$$

onde $Z=\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\left(W_T-W_t\right)\sim N\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t),\sigma^2(T-t)\right)$. Logo,

$$F(t,s)=e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi\left(se^y\right)f(y)\,dy, \tag{8.28}$$

onde f é a densidade da v.a. gaussiana Z. A fórmula integral (8.28), para uma função Φ dada, deve em geral ser calculada usando métodos numéricos. Existem contudo alguns casos particulares em que (8.28) pode ser obtida de forma analítica. Por exemplo, para uma opção Europeia de compra (do tipo "call") com payoff

$$\Phi(x)=(x-K)^+=\max(x-K,0),$$

temos

$$\begin{aligned}
F(t,s) &= e^{-r(T-t)}\int_{-\infty}^{+\infty}\max\left(se^y-K,0\right)f(y)\,dy \\
&= e^{-r(T-t)}\int_{\ln(K/s)}^{+\infty}\left(se^y-K\right)f(y)\,dy \\
&= e^{-r(T-t)}\left(s\int_{\ln(K/s)}^{+\infty}e^yf(y)\,dy-K\int_{\ln(K/s)}^{+\infty}f(y)\,dy\right) \qquad (8.29)
\end{aligned}$$

e o primeiro integral pode ser calculado da seguinte forma:

$$\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} e^y f(y)\, dy =$$

$$= \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(y - \frac{\left(y-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi\,(T-t)}} dy$$

$$= \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{2\sigma^2(T-t)y-\left(y-\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi\,(T-t)}} dy$$

$$= e^{r(T-t)} \int_{\ln(K/s)}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{\left(y-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)}{\sigma\sqrt{2\pi\,(T-t)}} dy$$

Mas $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left(-\frac{\left(y-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)$ é a função densidade de uma v.a. Z^* com distribuição $N\left(\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right)$ e portanto

$$\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} e^y f(y)\, dy = e^{r(T-t)} Q\left(Z^* \geq \ln(K/s)\right)$$

$$= e^{r(T-t)} Q\left(\overline{Z} \geq \frac{\ln(K/s) - \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= e^{r(T-t)} Q\left(\overline{Z} \leq \frac{\ln(s/K) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= e^{r(T-t)} N\left[d_1(t,s)\right],$$

onde $N[x]$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição $N(0,1)$ e

$$d_1(t,s) = \frac{\ln(s/K) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

O segundo integral pode ser calculado da seguinte forma.

$$\int_{\ln(K/s)}^{+\infty} f(y)\, dy = Q\left(Z \geq \ln(K/s)\right)$$

$$= Q\left(\overline{Z} \geq \frac{\ln(K/s) - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right)$$

$$= Q\left(\overline{Z} \leq \frac{\ln(s/K) + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) = N\left[d_2(t,s)\right],$$

onde $N[x]$ é a função de distribuição cumulativa da distribuição $N(0,1)$ e

$$d_2(t,s) = \frac{\ln(s/K) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

Voltando à eq. (8.29), obtemos

$$\begin{aligned} F(t,s) &= e^{-r(T-t)}\left(se^{r(T-t)}N[d_1(t,s)] - KN[d_2(t,s)]\right) \\ &= sN[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(t,s)] \end{aligned}$$

e esta é a conhecida Fórmula de Black-Scholes:

$$F(t,s) = sN[d_1(t,s)] - e^{-r(T-t)}KN[d_2(t,s)].$$

Exercício 8.10 *Deduza a fórmula de Black-Scholes a partir de (8.27) para uma opção de venda europeia (ou opção "put"com payoff* $\Phi(S_T) = \max(K - S_T, 0)$*).*

Bibliografia

[1] Tomas Björk, Arbitrage Theory in Continuous Time, 2nd Edition. Oxford University Press, 2004.

[2] Zdzislaw Brzezniak and Tomasz Zastawniak, Basic Stochastic Processes. Springer, 1999.

[3] Marek Capinski and Ekkehard Kopp, Measure, Integral and Probability. Springer, 1998.

[4] Robert Jarrow and Philip Protter, A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880–1970. IMS Lecture Notes Monograph, vol. 45 (2004), pages 1–17.

[5] Ioannis Karatzas and Steven Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition. Springer, 1991.

[6] Peter E. Kloeden and Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer, 1992.

[7] Thomas Mikosch, Elementary Stochastic Calculus with Finance in view. World Scientific, 1998.

[8] Daniel Müller, Probabilidade e processos estocásticos: uma abordagem rigorosa com vista aos modelos em finanças. Coimbra, Almedina, 2011.

[9] David Nualart, Stochastic Calculus (Lecture notes, Kansas University), http://www.math.ku.edu/~nualart/StochasticCalculus.pdf, 2008.

[10] Bernt Oksendal, Stochastic Differential Equations, 6th Edition. Springer, 2003.

[11] Daniel Revuz and Marc Yor, Continuous martingales and Brownian motion. Third Edition. Springer, 1999.

[12] Steven Shreve, Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models. Springer, 2004.