

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

ISEG

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

1 / 25

Variação quadrática do integral estocástico indefinido

- Seja $u \in L^2_{a,T}$. Então

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} u_s ds \right)^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} \int_0^t u_s^2 ds,$$

quando $n \rightarrow \infty$ e com $t_j := \frac{jt}{n}$.

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

2 / 25

Extensões do integral estocástico

- Pode substituir-se $\{\mathcal{F}_t\}$ (filtração gerada pelo mov. Browniano) por uma filtração maior \mathcal{H}_t tal que o mov. Browniano B_t seja uma \mathcal{H}_t -martingala.
- Podemos substituir a condição 2) $E \left[\int_0^T u_t^2 dt \right] < \infty$. na definição de $L_{a,T}^2$ pela condição (mais fraca):
2') $P \left[\int_0^T u_t^2 dt < \infty \right] = 1$.
- Seja $L_{a,T}$ o espaço de processos que verifica a condição 1 da def. de $L_{a,T}^2$ (i.e. u é mensurável) e a condição 2'). O integral estocástico pode ser definido para processos $u \in L_{a,T}$, mas neste caso, em geral o integral estocástico não tem valor esperado zero nem se verifica a isometria de Itô.

Fórmula de Itô unidimensional

- A fórmula de Itô é uma versão estocástica da regra da cadeia.
- Exemplo:

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$$
$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + t$$
$$d(B_t^2) = 2B_t dB_t + dt$$

- \approx (desenvolvimento de Taylor de B_t^2 como função de B_t e t e com a convenção $(dB_t)^2 = dt$)

Fórmula de Itô unidimensional

- Se f é de classe C^2 vamos ter que

$$\begin{aligned} f(B_t) &= \text{integral estoc. indefinido} + \text{processo com trajec. diferenciáveis} \\ &= \text{processo de Itô} \end{aligned}$$

- Defina-se $L_{a,T}^1$ como o espaço de processos v tais que

1) v é mensurável

2") $P \left[\int_0^T |v_t| dt < \infty \right] = 1.$

Fórmula de Itô unidimensional

- Um processo contínuo e adaptado $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ diz-se um processo de Itô se verifica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s dB_s + \int_0^t v_s ds, \quad (1)$$

onde $u \in L_{a,T}$ e $v \in L_{a,T}^1$.

Fórmula de Itô unidimensional

Teorema

(Fórmula de Itô unidim.): Seja $X = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$ um processo de Itô da forma (1). Seja $f(t, x)$ uma função de classe $C^{1,2}$. Então o processo $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) u_s dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) u_s^2 ds.$$

- Na forma diferencial, a fórmula de Itô fica:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2.$$

onde $(dX_t)^2$ é calculado usando a tabela de produtos:

$$\begin{array}{ccc} \times & dB_t & dt \\ dB_t & dt & 0 \\ dt & 0 & 0 \end{array}$$

- A fórmula de Itô para $f(t, x)$ e $X_t = B_t$ ou seja $Y_t = f(t, B_t)$.

$$f(t, B_t) = f(0, 0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) ds.$$

$$df(t, B_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, B_t) dt.$$

- A fórmula de Itô para $f(x)$ e $X_t = B_t$ ou seja $Y_t = f(B_t)$.

$$df(B_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t) dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t) dt.$$

A fórmula de Itô multidimensional

- Suponha que $B_t := (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^m)$ é um movimento Browniano de dimensão m , ou seja, as componentes B_t^k , $k = 1, \dots, m$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes.
- Considere um processo de Itô de dimensão n , definido por

$$\begin{aligned}X_t^1 &= X_0^1 + \int_0^t u_s^{11} dB_s^1 + \dots + \int_0^t u_s^{1m} dB_s^m + \int_0^t v_s^1 ds, \\X_t^2 &= X_0^2 + \int_0^t u_s^{21} dB_s^1 + \dots + \int_0^t u_s^{2m} dB_s^m + \int_0^t v_s^2 ds, \\&\vdots \\X_t^n &= X_0^n + \int_0^t u_s^{n1} dB_s^1 + \dots + \int_0^t u_s^{nm} dB_s^m + \int_0^t v_s^n ds.\end{aligned}$$

A fórmula de Itô multidimensional

- Em notação diferencial temos:

$$dX_t^i = \sum_{j=1}^m u_t^{ij} dB_t^j + v_t^i dt,$$

com $i = 1, 2, \dots, n$.

- Ou então:

$$dX_t = u_t dB_t + v_t dt,$$

onde v_t é um processo n -dimensional, u_t é uma matriz $n \times m$ de processos.

- Assumimos que as componentes de u pertencem a $L_{a,T}$ e as componentes de v pertencem a $L_{a,T}^1$

A fórmula de Itô multidimensional

- Nestas condições, se $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é de classe $C^{1,2}$ então $Y_t = f(t, X_t)$ é um processo de Itô e temos a fórmula de Itô

$$dY_t^k = \frac{\partial f_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_t^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) dX_t^i dX_t^j.$$

A fórmula de Itô multidimensional

- O produto dos diferenciais $dX_t^i dX_t^j$ é calculado de acordo com as regras:

$$dB_t^i dB_t^j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ dt & \text{se } i = j \end{cases},$$
$$dB_t^i dt = 0,$$
$$(dt)^2 = 0.$$

A fórmula de Itô multidimensional

- No caso particular de B_t ser um mov. Browniano n -dimensional e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ser de classe C^2 com $Y_t = f(B_t)$ então a fórmula de Itô é

$$f(B_t) = f(B_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(B_s) dB_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(B_s) \right) ds$$

Fórmula de integração por partes

- Temos que

$$dX_t^i dX_t^j = \sum_{k=1}^m u_t^{ik} u_t^{jk} dt = \left[u_t (u_t)^T \right]_{ij} dt.$$

- Fórmula de integração por partes: Se X_t^1 e X_t^2 são processos de Itô e $Y_t = X_t^1 X_t^2$, então pela fórmula de Itô com $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, temos

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^2 dX_t^1 + X_t^1 dX_t^2 + dX_t^1 dX_t^2.$$

Ou seja:

$$X_t^1 X_t^2 = X_0^1 X_0^2 + \int_0^t X_s^2 dX_s^1 + \int_0^t X_s^1 dX_s^2 + \int_0^t dX_s^1 dX_s^2.$$

Exemplo

t

- Considere o processo

$$Y_t = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + \dots + (B_t^n)^2.$$

Represente este processo em termos de integrais estocásticos relativamente ao mov. Browniano n -dimensional.

- Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ temos:

$$dY_t = 2B_t^1 dB_t^1 + \dots + 2B_t^n dB_t^n + ndt.$$

ou seja:

$$Y_t = 2 \int_0^t B_s^1 dB_s^1 + \dots + 2 \int_0^t B_s^n dB_s^n + nt.$$

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

17
17 / 25

Exercício

t

- Seja $B_t := (B_t^1, B_t^2)$ um movimento Browniano bidimensional. Represente o processo

$$Y_t = \left(B_t^1 t, (B_t^2)^2 - B_t^1 B_t^2 \right)$$

como um processo de Itô.

- Pela fórmula de Itô multidimensional, com $f(t, x) = f(t, x_1, x_2) = (x_1 t, x_2^2 - x_1 x_2)$, temos:

$$dY_t^1 = B_t^1 dt + t dB_t^1,$$

$$dY_t^2 = -B_t^2 dB_t^1 + (2B_t^2 - B_t^1) dB_t^2 + dt$$

ou seja:

$$Y_t^1 = \int_0^t B_s^1 ds + \int_0^t s dB_s^1,$$

$$Y_t^2 = - \int_0^t B_s^2 dB_s^1 + \int_0^t (2B_s^2 - B_s^1) dB_s^2 + t.$$

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

18
18 / 25

Ideia da demonstração da fórmula de Itô unidimensional

t

- O processo

$$Y_t = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s) u_s dB_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s) v_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(s, X_s) u_s^2 ds.$$

é um processo de Itô.

- Assumimos que f e as suas derivadas parciais são limitadas (o caso geral pode provar-se aproximando f e as suas derivadas parciais por funções limitadas).
- Como sabemos, o integral estocástico pode ser aproximado por uma sucessão de integrais estocásticos de processos simples e portanto podemos assumir que u e v são processos simples.

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

19
19 / 25

- Dividindo o intervalo $[0, t]$ em n sub-intervalos iguais temos:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \sum_{k=0}^{n-1} (f(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}) - f(t_k, X_{t_k})).$$

- Pela fórmula de Taylor:

$$f(t_{k+1}, X_{t_{k+1}}) - f(t_k, X_{t_k}) = \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k}) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial X}(t_k, X_{t_k}) \Delta X_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t_k, X_{t_k}) (\Delta X_k)^2 + Q_k,$$

onde Q_k é o resto ou erro da fórmula de Taylor.

(ISEG)

Cap. 4.- A Fórmula de Itô

20
20 / 25

- Temos também que

$$\begin{aligned}\Delta X_k &= X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} v_s ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} u_s dB_s \\ &= v(t_k) \Delta t + u(t_k) \Delta B_k + S_k,\end{aligned}$$

onde S_k é o resto ou erro.

- Daqui, obtemos:

$$\begin{aligned}(\Delta X_k)^2 &= (v(t_k))^2 (\Delta t)^2 + (u(t_k))^2 (\Delta B_k)^2 \\ &\quad + 2v(t_k) u(t_k) \Delta t \Delta B_k + P_k,\end{aligned}$$

onde P_k é o resto.

- Substituindo estes termos, temos:

$$f(t, X_t) - f(0, X_0) = I_1 + I_2 + I_3 + \frac{1}{2} I_4 + \frac{1}{2} K_1 + K_2 + R,$$

onde

$$I_1 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k}) \Delta t,$$

$$I_2 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial t}(t_k, X_{t_k}) v(t_k) \Delta t,$$

$$I_3 = \sum_k \frac{\partial f}{\partial X}(t_k, X_{t_k}) u(t_k) \Delta B_k,$$

$$I_4 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t_k, X_{t_k}) (u(t_k))^2 (\Delta B_k)^2.$$

$$K_1 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (t_k, X_{t_k}) (v(t_k))^2 (\Delta t)^2,$$

$$K_2 = \sum_k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (t_k, X_{t_k}) v(t_k) u(t_k) \Delta t \Delta B_k,$$

$$R = \sum_k (Q_k + S_k + P_k).$$

- Quando $n \rightarrow \infty$, é simples mostrar que

$$I_1 \rightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t} (s, X_s) ds,$$

$$I_2 \rightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} (s, X_s) v_s ds,$$

$$I_3 \rightarrow \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x} (s, X_s) u_s dB_s.$$

- Como já vimos antes (variação quadrática do movimento Browniano), temos que

$$\sum_k (\Delta B_k)^2 \rightarrow t,$$

pelo que

$$I_4 \rightarrow \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (s, X_s) u_s^2 ds.$$

- Por outro lado, temos também que

$$K_1 \rightarrow 0,$$

$$K_2 \rightarrow 0.$$

- Também se pode mostrar (mas é mais difícil e mais técnico) que

$$R \rightarrow 0.$$

- Conclusão: no limite obtemos a fórmula de Itô.