

# Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas - parte 1

ISEG

(ISEG)

Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas -

1 / 15

## Equações Diferenciais Estocásticas

- EDO's determinísticas:

$$f(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- EDO de 1ª ordem:

$$\frac{dx(t)}{dt} = b(t, x(t))$$

ou

$$dx(t) = b(t, x(t)) dt$$

- Versão discreta:

$$\Delta x(t) = x(t + \Delta t) - x(t) \approx b(t, x(t)) \Delta t$$

(ISEG)

Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas -

2 / 15

- Exemplo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = cx(t)$$

tem como solução

$$x(t) = x(0) e^{ct}.$$

## Equações Diferenciais Estocásticas

- EDE na forma diferencial

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dB_t, \\ X_0 &= X_0 \end{aligned} \quad (1)$$

- $b(t, X_t)$  é o coeficiente de drift ou deriva,  $\sigma(t, X_t)$  é o coeficiente de difusão.
- EDE na forma integral:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s. \quad (2)$$

- Interpretação "naif" da EDE:  $\Delta X_t \approx b(t, X_t) \Delta t + \sigma(t, X_t) \Delta B_t$ . e  $\Delta X_t \approx N\left(b(t, X_t) \Delta t, (\sigma(t, X_t))^2 \Delta t\right)$ .

## Definição

Uma solução da EDE (1) ou (2) é um processo estocástico  $\{X_t\}$  que satisfaz:

- ①  $\{X_t\}$  é um processo adaptado ao mov. Browniano com trajectórias contínuas.
- ②  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T (\sigma(s, X_s))^2 ds \right] < \infty$ .
- ③  $\{X_t\}$  satisfaz a EDE (1) ou (2)

- As soluções das EDE's também se chamam "difusões" ou "processos de difusão".

## Resolução de EDE's pela fórmula de Itô

- **Exemplo:** Movimento Browniano Geométrico. EDE:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (3)$$

ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \quad (4)$$

- Como resolver esta EDE?
- Suponhamos que  $X_t = f(t, B_t)$  com  $f \in C^{1,2}$ . Pela fórmula de Itô:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 + \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) dB_s. \quad (5)$$

- Comparando (4) com (5) temos (existe unicidade de representação como processo de Itô)

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) = \mu f(s, B_s), \quad (6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s) = \sigma f(s, B_s). \quad (7)$$

- Derivando (7) obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, x) = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(s, x) = \sigma^2 f(s, x)$$

e substituindo em (6) temos

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) f(s, x) = \frac{\partial f}{\partial s}(s, x)$$

- Por separação de variáveis:  $f(s, x) = g(s)h(x)$ , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(s, x) = g'(s)h(x)$$

e

$$g'(s) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) g(s)$$

que é uma EDO linear com solução:

$$g(s) = g(0) \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s\right]$$

- Usando (7), obtemos  $h'(x) = \sigma h(x)$  e obtemos

$$f(s, x) = f(0, 0) \exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) s + \sigma x\right].$$

- Conclusão:

$$X_t = f(t, B_t) = X_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right] \quad (8)$$

que é o movimento Browniano geométrico.

- Observação: Note que se obteve a solução da EDE, resolvendo uma EDP determinística.

- Verificação de que (8) satisfaz a EDE (3) ou (4).
- Aplicando a fórmula de Itô a  $X_t = f(t, B_t)$  com

$$f(t, x) = X_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma x \right],$$

obtemos

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) X_s + \frac{1}{2} \sigma^2 X_s \right] ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s \\ &= X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s \end{aligned}$$

- ou:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t.$$

- **Exemplo:** Processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou equação de Langevin):

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t.$$

ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t dB_s.$$

- Nota: na forma discreta teríamos:

$$X_{t+1} = (1 + \mu) X_t + \sigma (B_{t+1} - B_t)$$

ou

$$X_{t+1} = \phi X_t + Z_t,$$

com  $\phi = 1 + \mu$  e  $Z_t \sim N(0, \sigma^2)$ . Temos uma série temporal autoregressiva de ordem 1.

- **Exemplo:** Processo de Ornstein-Uhlenbeck (ou equação de Langevin):

- Seja

$$Y_t = e^{-\mu t} X_t$$

ou  $Y_t = f(t, X_t)$  com  $f(t, x) = e^{-\mu t} x$ . Pela fórmula de Itô,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left( -\mu e^{-\mu s} X_s + \mu e^{-\mu s} X_s + \frac{1}{2} \sigma^2 \times 0 \right) ds + \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s.$$

- Logo,

$$X_t = e^{\mu t} X_0 + e^{\mu t} \int_0^t \sigma e^{-\mu s} dB_s.$$

- Se  $X_0 = \text{cte.}$ , o processo diz-se de Ornstein-Uhlenbeck.

- **Exemplo:** O movimento Browniano Geométrico (outra vez)

- Seja

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (9)$$

ou

$$X_t = X_0 + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s. \quad (10)$$

- Hipótese:

$$X_t = e^{Z_t}.$$

ou

$$Z_t = \ln(X_t).$$

- Aplicando a fórmula de Itô a  $f(X_t) = \ln(X_t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{1}{X_t} dX_t + \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{X_t^2} \right) (dX_t)^2 \\ &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB_t. \end{aligned}$$

- Ou seja:

$$Z_t = Z_0 + \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t$$

- e:

$$X_t = X_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right].$$

- De forma mais geral, a solução da EDE linear homogénea

$$dX_t = b(t) X_t dt + \sigma(t) X_t dB_t$$

é

$$X_t = X_0 \exp \left[ \int_0^t \left( b(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right].$$