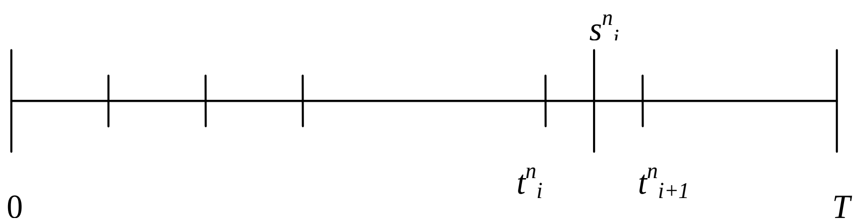
Cap. 5.- Equações Diferenciais Estocásticas - parte 3

ISEG

EDE's - Aproximações numéricas

- Muitas EDE's não podem ser resolvidas explicitamente $\Longrightarrow$ são necessários métodos numéricos para obter aproximações das soluções.
- EDE:
$$dX_t = b\left(X_t\right) dt + \sigma\left(X_t\right) dB_t,$$
com condição inicial $X_0 = x$.
- Partição: $t_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ e comp. de cada subintervalo: $\delta_n = \frac{T}{n}$



Método de Euler

- Valores exactos da solução:

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\, ds + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\, dB_s. \qquad (1)$$

- Aproximação de Euler

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\, ds \approx b(X(t_{i-1}))\, \delta_n,$$
$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\, dB_s \approx \sigma(X(t_{i-1}))\, \Delta B_i,$$

onde $\Delta B_i := B(t_i) - B(t_{i-1})$.

- Esquema de Euler:

$$X^{(n)}(t_i) = X^{(n)}(t_{i-1}) + b\left(X^{(n)}(t_{i-1})\right)\delta_n + \sigma(X(t_{i-1}))\, \Delta B_i, \quad (2)$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Método de Euler

- Em cada intervalo (t_{i-1}, t_i), o valor de $X^{(n)}$ é obtido por interpolação linear.
- O erro de aproximação é definido por

$$e_n := \sqrt{E\left[\left(X_T - X_T^{(n)}\right)^2\right]}. \qquad (3)$$

- Para o esquema de Euler pode mostrar-se que

$$e_n^{Eul} \leq c\sqrt{\delta_n},$$

onde c é uma constante.

Método de Euler

- Como simular uma trajectória da solução usando o método de Euler?

1. Basta simular os valores de n variáveis aleatórias com distribuição normal $N(0,1)$: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.
2. Substituir ΔB_i em (2) por $\xi_i \sqrt{\delta_n}$ e determinar os valores de $X^{(n)}(t_i)$ usando o esquema por recorrência (2).
3. Em cada intervalo (t_{i-1}, t_i) determinar $X^{(n)}$ por interpolação linear.entre $X^{(n)}(t_{i-1})$ e $X^{(n)}(t_i)$.

Método de Milstein

- Aplicar a fórmula de Itô a $b(X_t)$ e a $\sigma(X_t)$, considerando $t_{i-1} \leq t \leq t_i$. Temos

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} b(X_s)\, ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big[b(X(t_{i-1})) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(bb' + \frac{1}{2} b'' \sigma^2 \right)(X_r)\, dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma b')(X_r)\, dB_r \Big] ds,$$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \sigma(X_s)\, dB_s = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Big[\sigma(X(t_{i-1})) + \\ + \int_{t_{i-1}}^{s} \left(b\sigma' + \frac{1}{2} \sigma'' \sigma^2 \right)(X_r)\, dr + \int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\, dB_r \Big] dB_s.$$

- Exercício: Prove esta igualdade.

Método de Milstein

- Então, temos partir de (1), que

$$X^{(n)}(t_i) - X^{(n)}(t_{i-1}) = b(X(t_{i-1}))\,\delta_n + \sigma(X(t_{i-1}))\,\Delta B_i + R_i.$$

Pode mostrar-se que o termo dominante de R_i é o integral estocástico duplo

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\, dB_r \right) dB_s,$$

sendo os outros termos de ordem mais baixa e desprezáveis.

- Aproximação de Milstein:

$$\begin{aligned} R_i &\approx \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} (\sigma\sigma')(X_r)\, dB_r \right) dB_s \\ &\approx (\sigma\sigma')(X(t_{i-1})) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s \end{aligned}$$

e

-

$$\begin{aligned} &\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\int_{t_{i-1}}^{s} dB_r \right) dB_s = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (B_s - B(t_{i-1}))\, dB_s \\ &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} B_s dB_s - B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2}\left[B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 - \delta_n \right] - B(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1})) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\Delta B_i)^2 - \delta_n \right], \end{aligned}$$

onde, para calcular $\int_{t_{i-1}}^{t_i} B_s dB_s$, pode usar a fórmula de Itô aplicada a $f(B_t) = B_t^2$.

Método de Milstein

- Esquema de Milstein:

$$X^{(n)}(t_i) = X^{(n)}(t_{i-1}) + b\left(X^{(n)}(t_{i-1})\right)\delta_n + \sigma(X(t_{i-1}))\Delta B_i + \frac{1}{2}(\sigma\sigma')(X(t_{i-1}))\left[(\Delta B_i)^2 - \delta_n\right].$$

- Pode mostrar-se que o erro da aproximação de Milstein é:

$$e_n^{Mil} \leq c\delta_n.$$

A propriedade de Markov para processos de difusão

- As soluções de EDE's dizem-se processos de difusão.
- Seja $X = \{X_t, t \geq 0\}$ um processo de difusão (de dimensão n) que satisfaz a EDE:

$$dX_t = b(t, X_t)\,dt + \sigma(t, X_t)\,dB_t, \tag{4}$$

onde B é um mov. Browniano m-dimensional e b e σ satisfazem as condições do teroema de existência e unicidade.

A propriedade de Markov para processos de difusão

Definição

Diz-se que um processo $X = \{X_t, t \geq 0\}$ é um processo de Markov se $\forall s < t$, temos

$$E\left[f\left(X_t\right)|X_r, r \leq s\right] = E\left[f\left(X_t\right)|X_s\right].$$

para qualquer função limitada e mensurável f definida em $\mathbb{R}^n$.

- Em particular, se $C \subset \mathbb{R}^n$ e é mensurável, temos:

$$P\left[X_t \in C|X_r, r \leq s\right] = P\left[X_t \in C|X_s\right].$$

- Propriedade de Markov: os valores futuros de um processo dependem só do seu valor presente e não dos valores passados (se o valor presente for conhecido).
- A lei de probabilidade dos processos de Markov é descrita pelas probabilidades de transição:

$$P\left(C, t, x, s\right) := P\left(X_t \in C|X_s = x\right), \quad 0 \leq s < t.$$

A propriedade de Markov para processos de difusão

- $P(\cdot, t, x, s)$ é a lei de probabilidade de X_t condicionada a $X_s = x$. Se esta probab. condicionada tiver densidade, representamo-la por:

$$p(y, t, x, s).$$

Exemplo

O movimento Browniano é um processo de Markov com probabilidades de transição:

$$p(y, t, x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right). \tag{5}$$

De facto

$$\begin{aligned} &P[B_t \in C|\mathcal{F}_s] = P[B_t - B_s + B_s \in C|\mathcal{F}_s] \\ &= P[B_t - B_s + x \in C]\,|_{x=B_s} \\ &= P[B_t \in C|B_s = x], \end{aligned}$$

onde se usaram as propriedades da esperança condicionada e o facto de $B_t - B_s$ ser independente de $\mathcal{F}_s$ e de B_s ser conhecido dada a "informação"$\mathcal{F}_s$ (ou seja, B_s é $\mathcal{F}_s$-mensurável).
Mas como $B_t - B_s + x$ tem dist. Normal com média x e variância $t - s$, então a densidade da probabilidade de transição é (5).

A propriedade de Markov para processos de difusão

- Notação: $\{X_t^{s,x}, t \geq s\}$ é a solução da EDE (4) definida em $[s, +\infty)$ e com condição inicial $X_s^{s,x} = x$.
- Se $s = 0$, usamos a notação $X_t^{0,x} = X_t^x$.
- Propriedades:
  1. Existe uma versão contínua (em todos os parâmetros s, t, x) do processo $\{X_t^{s,x}, 0 \leq s \leq t, x \in \mathbb{R}^n\}$.
  2. Para qualquer $t \geq s$, temos

$$X_t^x = X_t^{s,X_s^x}. \tag{6}$$

A propriedade de Markov para processos de difusão

- Prova de (2): X_t^x satisfaz a EDE

$$X_t^x = X_s^x + \int_s^t b\left(u, X_u^x\right) du + \int_s^t \sigma\left(u, X_u^x\right) dB_u.$$

Por outro lado, $X_t^{s,y}$ satisfaz

$$X_t^{s,y} = y + \int_s^t b\left(u, X_u^{s,y}\right) du + \int_s^t \sigma\left(u, X_u^{s,y}\right) dB_u.$$

Substituindo y por X_s^x obtemos que X_t^x e X_t^{s,X_s^x} são soluções da mesma EDE em $[s, +\infty)$ e com a mesmo condição inicial X_s^x.Logo, pelo teorema de existencia e unicidade, a solução é única e $X_t^x = X_t^{s,X_s^x}$.

A propriedade de Markov para processos de difusão

Teorema

(Propriedade de Markov dos processos de difusão): Seja f uma função limitada e mensurável em $\mathbb{R}^n$. Então, para qualquer $0 \leq s \leq t$, temos

$$E\left[f\left(X_t\right)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(X_t^{s,x}\right)\right]|_{x=X_s} \tag{7}$$

- Os processos de difusão são processos de Markov.

A propriedade de Markov para processos de difusão

- Prova do teorema: Por (6) e pelas propriedades da esperança condicionada, temos:

$$E\left[f\left(X_t\right)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(X_t^{s,x}\right)|\mathcal{F}_s\right] = E\left[f\left(X_t^{s,x}\right)\right]|_{x=X_s},$$

  porque $X_t^{s,x}$ é independente de $\mathcal{F}_s$ e X_s é conhecido a partir da "informação"$\mathcal{F}_s$ (i.e., X_s é $\mathcal{F}_s$-mensurável). Aplica-se a propriedade 7 da esperança condicionada (ver slides da Aula 2).

A propriedade de Markov para processos de difusão

- As probabilidades de transição de um processo de difusão são dadas por
$$P(C,t,x,s) = P(X_t^{s,x} \in C).$$
- Se um processo de difusão é homogéneo no tempo (os coeficientes b e σ não dependem de t) então a propriedade de Markov (7) pode escrever-se:
$$E[f(X_t)\,|\mathcal{F}_s] = E[f(X_{t-s}^x)]\,|_{x=X_s}.$$

A propriedade de Markov para processos de difusão
Exercício: Calcule as probabilidades de transição do processo de Ornstein-Uhlenbeck com reversão para a média:

- Resolução:
$$dX_t = a(m - X_t)\,dt + \sigma dB_t.$$
Solução em $[s,+\infty)$, com condição inicial $X_s = x$:
$$X_t^{s,x} = m + (x-m)\,e^{-a(t-s)} + \sigma e^{-at}\int_s^t e^{ar}dB_r.$$
Então, como $\left\{\int_s^t e^{ar}dB_r, t \geq s\right\}$ é um processo Gaussiano com média e variância (ver exemplo em aula anterior), temos que
$$E\left[X_t^{s,x}\right] = m + (x-m)\,e^{-a(t-s)},$$
$$\mathrm{Var}\left[X_t^{s,x}\right] = \frac{\sigma^2}{2a}\left(1 - e^{-2a(t-s)}\right).$$

A propriedade de Markov para processos de difusão

- (cont. do exercício) A probabilidade de transição é

$$P(\cdot, t, x, s) = \text{Distribuição de } X_t^{s,x}.$$

Logo é uma distribuição normal com média e variância dadas acima.

Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

- No integral estocástico de Itô para processos contínuos, quando definimos $\int_0^t u_s dB_s$ usando somas do tipo Riemann-Stieltjes, usamos sempre o valor do processo u no ponto t_{j-1} e assumimos que o processo é constante em $[t_{j-1}, t_j)$.
- Como consequência, o valor esperado do integral de Itô é nulo e a sua variância pode calcular-se usando a propriedade de isometria de Itô. Além disso, o integral de Itô indefinido é uma martingala.
- A desvantagem do integral de Itô é que a "regra da cadeia"(ou fórmula de Itô) aparece um termo de 2^a ordem (termo que não aparece no cálculo clássico).

Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

- A integral de Stratonovich $\int_0^T u_s \circ dB_s$ define-se como o limite em probabilidade da sucessão:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(u_{t_{i-1}} + u_{t_i} \right) \Delta B_i,$$

  com $t_i = \frac{iT}{n}$.
- Relação entre o integral de Itô e o integral de Stratonovich?

´Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

- Se u é um processo de Itô da forma

$$u_t = u_0 + \int_0^t \beta_s ds + \int_0^t \alpha_s dB_s. \tag{8}$$

  é possível mostrar que

$$\int_0^T u_s \circ dB_s = \int_0^T u_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^T \alpha_s ds.$$

Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

- A "fórmula de Itô"para o integral estocástico de Stratonovich coincide com a regra da cadeia para o cáculo clássico.
- De facto, se u é um processo da forma (8) e

$$X_t = X_0 + \int_0^t v_s ds + \int_0^t u_s \circ dB_s$$

então pode mostrar-se que

$$df(X_t) = f'(X_t) \circ dX_t$$

Cálculo de Stratovonich e EDE's de Stratonovich

- Uma EDE no sentido de Itô pode ser transformada numa EDE no sentido de Stratonovich, usando a fórmula que relaciona ambos os integrais:
- EDE de Itô:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s.$$

- EDE de Stratonovich equivalente:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)\, ds - \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma\sigma')(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) \circ dB_s.$$

- Isto porque a decomposição de Itô de $\sigma(t, X_t)$ é

$$\sigma(t, X_t) = \sigma(0, X_0) + \int_0^t \left(\sigma' b - \frac{1}{2}\sigma''\sigma^2\right)(s, X_s)\, ds + \int_0^t (\sigma\sigma')(s, X_s)\, dB_s.$$