Cap. 6.- Relações entre EDE's e EDP's

ISEG

Gerador ou operador infinitesimal de uma difusão

- Considere uma difusão n-dimensional X que satisfaz a EDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dB_t, \\ X_0 &= x_0 \end{aligned}$$

  onde B é um mov. Browniano m-dimensional. Assuma que b e σ satisfazem as condições do teorema de existência e unicidade de EDE's.
- Considere que $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to M\left(n, m\right)$, onde $M\left(n, m\right)$ é o conjunto de matrizes $n \times m$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definição

O gerador ou operador infinitesimal associado à difusão X é o operador diferencial de 2ª ordem A definido por

$$Ah\left(t,x\right) := \sum_{i=1}^{n} b_i\left(t,x\right)\frac{\partial h}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\sigma\sigma^T\right)_{i,j}\left(t,x\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j},$$

onde h é uma função de classe $C^{1,2}$ definida em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$.

-

- O operador infinitesimal é também designado por operador de Dynkin, operador de Itô ou "Kolmogorov Backward operator".
- Relação entre a difusão X e o operador A: Pela fórmula de Itô, se $f\left(t,x\right)$ é uma função de classe $C^{1,2}$, então $f\left(t,X_t\right)$ é um processo de Itô com "diferencial":

$$df\left(t,X_t\right) = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}\left(t,X_t\right) + Af\left(t,X_t\right)\right\}dt + \left[\nabla_x f\left(t,X_t\right)\right]\sigma\left(t,X_t\right)dB_t, \tag{1}$$

onde o gradiente se define como:

$$\nabla_x f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

- Note-se que se

$$E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,X_t)\,\sigma_{i,j}(t,X_t)\right)^2 ds < \infty, \qquad (2)$$

para todo o $t > 0$ e para todo i, j, então os integrais estocásticos em (1) estão bem definidos e são martingalas, pelo que

$$M_t = f(t,X_t) - \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s) + Af(s,X_s)\right) ds$$

é uma martingala.

- Uma condição suficiente para que (2) seja satisfeita é que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial s}(s,X_s)$ tenham crescimento linear, i.e.

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)\right| \leq C(1+|x|).$$

EDPs

- A equação diferencial parcial

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + AF(t,x) = 0, \qquad (3)$$
$$F(T,x) = \Phi(x)$$

é uma EDP parabólica com condição terminal (em T).

- A EDP anterior também se pode escrever como (supondo $n = 1$, para simplificar a notação)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0, \qquad (4)$$
$$F(T,x) = \Phi(x).$$

EDPs

- Em vez de resolver a EDP analiticamente vamos tentar obter a solução usando uma "fórmula de representação estocástica".
- Suponhamos que existe uma solução F. Fixemos t e x e definamos o processo X em $[t, T]$ como a solução da EDE

$$dX_s = b(s, X_s)\, ds + \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$
$$X_t = x.$$

- O operador infinitesimal associado a X é

$$A = b(t, x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

que é exactamente o operador que aparece na EDP (3) ou (4).

- Aplicando a fórmula de Itô a F, temos (ver (1)):

$$F(T, X_T) = F(t, X_t) + \int_t^T \left(\frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + AF(s, X_s) \right) ds$$
$$+ \int_t^T \sigma(s, X_s) \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, dB_s.$$

Mas $\frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + AF(s, X_s) = 0$ e aplicando o valor esperado (considerando o valor inicial $X_t = x$), obtemos:

$$E_{t,x}[F(T, X_T)] = E_{t,x}[F(t, X_t)],$$

supondo que o integral estocástico está bem definido e portanto o seu valor esperado é zero.

- Como, pelos valores na fronteira, $E_{t,x}\left[F\left(T,X_T\right)\right] = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right]$ e $E_{t,x}\left[F\left(t,X_t^{t,x}\right)\right] = F\left(t,x\right)$, temos

$$F\left(t,x\right) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

sendo esta a representação estocástica da solução da EDP (4).

Fórmula de Feynman-Kac

Proposição

Suponhamos que F é solução do problema (4). Suponhamos que $\sigma\left(s,X_s\right)\frac{\partial F}{\partial x}\left(s,X_s\right)$ é um processo em L^2 (i.e. $E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(t,X_t\right)\sigma_{i,j}\left(t,X_t\right)\right)^2 ds < \infty$). Então

$$F\left(t,x\right) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$\begin{aligned} dX_s &= b\left(s,X_s\right)ds + \sigma\left(s,X_s\right)dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Fórmula de Feynman-Kac

Proposição

Suponhamos que F é solução do problema (3). Suponhamos que $E\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_t)\,\sigma_{i,j}(t, X_t)\right)^2 ds < \infty$, para todo o $t > 0$ e para todo i, j. Então

$$F(t, x) = E_{t,x}\left[\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$\begin{aligned} dX_s &= b(s, X_s)\,ds + \sigma(s, X_s)\,dB_s, \\ X_t &= x. \end{aligned}$$

Notas suplementares

- Uma EDP parabólica é uma EDP de 2ª ordem do tipo

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + \cdots = 0,$$

  com $B^2 - 4AC = 0$.
- Exemplo: Eq. do calor a 1 dimensão:

$$u_t = ku_{xx}.$$