Cap. 6.- Relações entre EDE's e EDP's - Parte 2

ISEG

- Considere-se que a função $q(x)$ é contínua e limitada inferiormente, com $q \in C(\mathbb{R}^n)$.
- Considere a equação diferencial parcial

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + AF(t,x) - q(x)F(t,x) = 0, \qquad (1)$$
$$F(T,x) = \Phi(x)$$

com condição terminal (em T).

- A EDP anterior também se pode escrever como (supondo $n=1$, para simplificar a notação)

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + b(t,x)\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - q(x)F(t,x) = 0, \qquad (2)$$
$$F(T,x) = \Phi(x).$$

- Em vez de resolver a EDP analiticamente vamos tentar obter a solução usando uma "fórmula de representação estocástica".
- Suponhamos que existe uma solução F. Fixemos t e x e definamos o processo X em $[t, T]$ como a solução da EDE

$$dX_s = b(s, X_s)\, ds + \sigma(s, X_s)\, dB_s,$$
$$X_t = x.$$

- O operador infinitesimal associado a X é

$$A = b(t, x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

que é exactamente o operador que aparece na EDP (1) ou (2).

- Aplicando a fórmula de Itô a $g(t, X_t) = \exp\left(-\int_0^t q(X_s)\, ds\right) F(t, X_t)$ e integrando entre t e T, temos:

$$\exp\left(-\int_0^T q(X_s)\, ds\right) F(T, X_T) = \exp\left(-\int_0^t q(X_s)\, ds\right) F(t, X_t) +$$
$$+ \int_t^T e^{-\int_0^s q(X_r)dr}\left(\frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + AF(s, X_s) - q(X_s)F(s, X_s)\right) ds$$
$$+ \int_t^T \exp\left(-\int_0^s q(X_r)\, dr\right)\sigma(s, X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s)\, dB_s.$$

Mas $\frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) + AF(s, X_s) - q(X_s)F(s, X_s) = 0$ e aplicando o valor esperado (considerando o valor inicial $X_t = x$), obtemos:

$$E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q(X_s)\, ds\right) F(T, X_T)\right] = E_{t,x}\left[F(t, X_t)\right],$$

supondo que o integral estocástico está bem definido e portanto o seu valor esperado é zero.

- Como, $E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q(X_s)\,ds\right)F(T,X_T)\right] =$ $E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q(X_s)\,ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right]$ e $E_{t,x}\left[F\left(t,X_t^{t,x}\right)\right] = F(t,x)$, temos

$$F(t,x) = E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s^{t,x}\right)ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

sendo esta a representação estocástica da solução da EDP (1) ou (2).

Fórmula de Feynman-Kac 2

Proposição

Seja F solução do problema (1) ou (2). Considere-se que $\sigma(s,X_s)\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)$ é um processo em $L^2_{a,T}$ (i.e. $E\int_0^T\left[\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\sigma(s,X_s)\right]^2 ds < \infty$). Então

$$F(t,x) = E_{t,x}\left[\exp\left(-\int_t^T q\left(X_s^{t,x}\right)ds\right)\Phi(X_T^{t,x})\right],$$

onde $X_s^{t,x}$ satisfaz

$$dX_s = b(s,X_s)\,ds + \sigma(s,X_s)\,dB_s,$$
$$X_t = x.$$

- Nota: Considerando que $q(x)$ é contínua e limitada inferiormente, uma condição suficiente para que $E\int_0^T \left[\exp\left(-\int_0^s q\left(X_r\right) dr\right) \frac{\partial F}{\partial x}\left(s, X_s\right) \sigma\left(s, X_s\right)\right]^2 ds < \infty$ é que a derivada $\frac{\partial F}{\partial x}\left(s, x\right)$ tenha crescimento linear, i.e.

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\left(s, x\right)\right| \leq C\left(1 + |x|\right).$$