Obrigações

Maria Teresa Medeiros Garcia
MIF, ISEG, UL

Introdução

- Uma obrigação é um instrumento – valor mobiliário – fundamental no financiamento de uma economia.

- Consequentemente, o mercado de obrigações ou mercado de valores representativos de dívida constitui um importante segmento do mercado de capitais onde os diversos agentes económicos – uns com necessidade de financiamento, outros com capacidade de financiamento – procedem à transferência de fundos a médio e longo prazo de acordo com as suas necessidades.

- Atendendo a estas últimas é essencial ter presente:
  - a noção de obrigação,
  - suas características e variantes, assim como
  - a sua avaliação em termos de rendimento e risco.

Só deste modo é possível aos agentes em confronto tomar decisões conscientes.

Este capítulo apresenta aquelas questões fundamentais de uma forma sucinta fazendo apelo, sempre que necessário, a leituras atentas na bibliografia especializada.

Definição

Uma obrigação é um título de dívida, negociável, através do qual o seu **emitente** se compromete:

- a pagar um rendimento – o juro – nos termos definidos à data de emissão e durante um determinado período de tempo; bem como
- a reembolsar o capital,

a quem o detenha, o **obrigacionista**.

- Os agentes económicos emitentes de obrigações pretendem captar fundos a médio e longo prazo para fazer face às suas necessidades de financiamento.

- Os **principais emitentes** são: o Estado, os municípios, os bancos e as empresas e ainda as organizações supranacionais.

- Os **compradores** de obrigações são: os investidores particulares, as empresas e os intermediários financeiros, com lugar de destaque as instituições bancárias, as companhias de seguros, as sociedades gestoras de fundos de investimento mobiliários e as sociedades gestoras de fundos de pensões.

Características

- Uma obrigação possui diversas características a partir das quais é possível distinguir inúmeras **variantes** ou **tipos**. Antes de proceder a uma apresentação dos principais tipos de obrigações vamos descrever as referidas características.

Valor nominal e Preço de emissão

- O valor nominal ou valor facial (V ou VN) de uma obrigação corresponde ao valor inscrito no título.

- O preço de emissão (PE) é o montante a pagar para adquirir em primeira mão, isto é, subscrever, uma obrigação. Este pode diferir ou não do valor nominal. Assim, é possível ter-se diversas situações:
- 1 – Se PE<VN, a emissão diz-se abaixo do par;
- 2 – Se PE=VN, a emissão diz-se ao par;
- 3 – Se PE>VN, a emissão diz-se acima do par. Neste caso, PE-V constitui o prémio de emissão.

Taxa de juro

- A taxa de juro, taxa de cupão ou taxa nominal é a razão de proporcionalidade que se aplica ao valor nominal para apurar o valor do juro periódico ou montante do cupão (JC).

Esta razão pode ser previamente fixada ou resultar de indexação, devendo incorporar o risco global do emitente, das outras características da emissão e das condições correntes do mercado. Habitualmente trata-se de uma taxa anual nominal.

A designação de cupão surgiu do facto de historicamente cada título físico representativo da obrigação conter pequenos rectângulos de papel destacáveis – cupões – que nos momentos estipulados eram separados e contra cuja entrega se efectuava o pagamento do juro. Com a desmaterialização dos títulos, o pagamento do juro resulta de um procedimento informático.

Periodicidade do juro e juro corrido

- A periodicidade do juro refere-se à frequência com que o juro é pago. É possível distinguir um pagamento trimestral, semestral ou anual.

- O juro corrido representa o montante de juros acumulados e ainda não recebidos desde a última data de vencimento de juros.

Vida máxima e Vida média

- A vida máxima de um empréstimo obrigacionista é o período de tempo que decorre entre a data de emissão e o momento do último reembolso do capital – a data de vencimento – e é habitualmente expressa em anos.

- A vida média de uma obrigação é a média dos períodos de tempo que medeiam entre a data de emissão e os vários reembolsos parciais do capital. Quando a amortização do capital se processa através de um único reembolso, a vida média iguala a vida máxima.

Maturidade

- A maturidade de uma obrigação é o período (máximo ou médio) restante a contar de qualquer data corrente após a emissão até o final do empréstimo. É comum distinguir as obrigações de acordo com a sua maturidade a cada momento:
- 1 – Se a maturidade for inferior a cinco anos, a obrigação diz-se de curto prazo;
- 2 – Se a maturidade estiver entre cinco e dez anos, a obrigação diz-se de médio prazo;
- 3 – Se a maturidade for igual ou superior a dez anos, a obrigação diz-se de longo prazo.

- A maturidade, a vida máxima e a vida média, são medidas do período remanescente das obrigações que apenas consideram o reembolso do capital, isto é, ignoram os fluxos de rendimento relacionados com os juros. Veremos de seguida que esta limitação é ultrapassada pela utilização do conceito de duração.

Valor de reembolso

- O valor de reembolso (VR) é o montante que a entidade emitente paga ao detentor da obrigação para proceder à amortização da dívida contraída podendo o valor de reembolso diferir ou não do valor nominal. Assim, é possível ter-se diversas situações:
- 1 – Se VN>VR, o reembolso diz-se abaixo do par;
- 2 – Se VN=VR, o reembolso diz-se ao par;
- 3 – Se VN<VR, o reembolso diz-se acima do par. Neste caso, VR-VN constitui o prémio de reembolso.

Período de carência e amortização

- O período de carência é o tempo que decorre entre a emissão e o primeiro reembolso.

- A amortização da obrigação é o pagamento do capital emprestado, o qual pode ser efectuado mediante um único reembolso ou mediante vários reembolsos periódicos que por sua vez podem ser de valor constante ou de valor crescente.

Cotação

- A cotação de uma obrigação é o preço de mercado (P) ao qual é transaccionada no mercado secundário logo que seja admitida numa bolsa de valores.
- A cotação também pode diferir do valor nominal, reflectindo a relação entre a taxa de juro contratual e o nível e a estrutura das taxas de juro de mercado.
- Assim, tem-se:
- 1 – Se P<VN, a obrigação está a ser transaccionada a desconto;
- 2 – Se P>VN, a obrigação está a ser transaccionada a prémio.

Cláusulas contratuais

- É possível distinguir outros aspectos relacionados com as condições de emissão das obrigações como seja a inclusão de cláusulas contratuais destinadas a garantir os direitos dos obrigacionistas no que concerne ao pagamento atempado dos juros e ao reembolso do capital.

- São as conhecidas *covenants*. São positivas se têm um carácter positivo, exigindo que a empresa actue num certo sentido, ou negativas se exigem que a empresa não proceda de determinada forma.

Call option ou *call provision*

- É possível referir as obrigações emitidas com uma *call option* ou *call provision*, isto é, obrigações com a opção de reembolso antecipado do emitente.

- Este direito do emitente amortizar as obrigações antes do prazo previsto é vantajoso sobretudo se as taxas de juro descerem. Do ponto de vista do obrigacionista a *call option* é potencialmente negativa dependendo da evolução das taxas de juro. Em virtude disso existem alguns mecanismos de protecção.

Put option

- As obrigações também podem ser emitidas com uma *put option*, isto é, com a opção de reembolso antecipado a pedido do obrigacionista.

- O exercício deste direito pode ser bastante interessante para os detentores das obrigações, embora introduza alguma incerteza nos planos dos emitentes. Consequentemente também existem alguns mecanismos de protecção.

Sinking fund

- As obrigações emitidas com *sinking fund* são obrigações em que a empresa emitente constitui um fundo de amortização com vista a compra ou reembolso, antecipado ou não, de parte ou da totalidade das obrigações que emitiu.

Tipos de obrigações

- É possível distinguir uma grande diversidade de tipos e designações de obrigações, em parte resultante da constante necessidade de adaptar as suas características às exigências quer de emitentes quer de detentores de obrigações.

Obrigações de taxa fixa ou clássicas

- Proporcionam uma taxa de juro fixa, ou seja inalterável durante toda a vida do empréstimo, e possuem uma maturidade predeterminada no momento da emissão.

- Consequentemente, todos os *cash flows* a que dão origem são conhecidos antecipadamente. Os *cash flows* incluem os cupões e o valor de reembolso e excluem os rendimentos de reinvestimento dos juros e as mais valias resultantes da venda da obrigação.

- Por isso se tornaram conhecidas como títulos de rendimento fixo e daí o seu sucesso junto dos investidores.

- Na realidade, isso não corresponde inteiramente à verdade. Efectivamente, a vantajosa segurança das obrigações de taxa fixa decorrente do conhecimento antecipado dos fluxos de rendimento por elas proporcionados só é efectiva na hipótese de detenção dos títulos até à maturidade.
- Sempre que o detentor se desfaz das obrigações antes da maturidade passa a estar dependente do preço de venda que é inversamente variável com o nível das taxas de juro de mercado. Existe portanto um risco implícito na sua detenção.

Obrigações de taxa variável

- O aparecimento das obrigações de taxa variável está associado a períodos de grande volatilidade das taxas de juro que tornavam desinteressante a detenção de obrigações de taxa fixa.
- Caracterizam-se por uma taxa de juro que pode evoluir ao longo do tempo obedecendo a determinadas regras e parâmetros fixados no momento da emissão.
- Assim, a taxa de juro de cada cupão será determinada por uma taxa de referência que melhor reflita a evolução das taxas de juro de mercado, sendo de referir as taxas médias do mercado monetário (a muito curto prazo ou a seis meses) e as taxas fixadas administrativamente.

Obrigações sem cupão

- Por não haver lugar a pagamento de juros periódicos, estas obrigações designam-se obrigações de cupão zero. O juro está implícito na diferença entre o preço de emissão (ou de aquisição) e o valor de reembolso (equivalente ao valor nominal). Consequentemente, estas obrigações são emitidas a desconto ou abaixo do par.
- O período de carência é bastante mais prolongado comparativamente às restantes obrigações que vimos até agora.

- Atrativos deste tipo de obrigações:
- 1. eliminação do risco de reinvestimento;
- 2. a sua duração é igual à maturidade;
- 3. elevados ganhos, sempre que as taxa de juro baixam.

A duração (*duration)* consiste na vida média ponderada por todos os fluxos financeiros em causa, como veremos a diante. Note-se que a duração duma obrigação sem cupão é sempre maior que a duração duma obrigação clássica com maturidade comparável.

Obrigações de capitalização automática

- Caracterizam-se pela aplicação da taxa de juro ao valor acumulado do capital no início de cada período e não ao valor do capital nominal, que é fixo. Aquele, no fim do período, é calculado com base no valor no início acrescido dos juros do período.

Outras obrigações

- A título ilustrativo podemos mencionar ainda outras obrigações que, por circunstâncias várias, são passíveis de desagregação das anteriores. A sua caracterização pode ser analisada em bibliografia especializada. É o caso das obrigações de caixa, das obrigações com *warrants*, obrigações convertíveis, obrigações garantidas e não garantidas, obrigações hipotecárias, etc.

Medidas de avaliação da rentabilidade

Tendo presente que o detentor de uma obrigação pode obter rendimento de três fontes potenciais a ela associadas:

- o juro periódico (do cupão),
- o rendimento proveniente do reinvestimento dos juros periódicos, e
- a mais valia (ou menos valia) resultante da venda ou amortização do título,

é natural que as várias medidas de rentabilidade recorram a pelo menos uma daquelas componentes.

A sua determinação torna-se fundamental para o investidor tomar decisões criteriosas.

Aquelas fontes dizem-potenciais porque em alguns tipos de obrigações nem todas estão se presentes.

É o caso das **obrigações sem cupão** onde é inexistente o pagamento periódico do juro. Daí que o seu rendimento apareça como a diferença entre o preço de emissão e o valor de reembolso, caso a obrigação seja adquirida em primeira mão e mantida até à amortização, ou como a diferença entre o preço de aquisição e o preço de mercado, em caso contrário.

Considerando-se obrigações do mesmo tipo, por exemplo **obrigações com cupão**, o rendimento pode diferir consoante a obrigação tenha sido adquirida, ou não, ao par e mantida, ou não, até à data de vencimento, ou transaccionada, ou não, ao par. Assim, o rendimento da obrigação aparece como a soma do juro do cupão, dos juros dos juros e ainda da mais ou menos valia, caso exista.

Taxa de cupão

- Como vimos anteriormente, a taxa de cupão ou taxa de juro nominal é a taxa de juro da obrigação fixada no momento da sua emissão. É uma taxa contratual que não pode ser alterada após a emissão. Formalmente, a taxa de juro nominal é

$$j$$

Taxa de rendimento corrente

- Esta taxa, também designada current yield, relaciona o valor do juro de cupão(JC) e o preço de mercado da obrigação (P). Formalmente tem-se:

$$TRC = \frac{JC}{P} \quad ,$$

- onde

$JC = j \, x VN$ e j é a taxa de juro nominal.

- A taxa de rendimento corrente é maior que a taxa de cupão quando a obrigação está a ser vendida a desconto, isto é, quando $P < VN$.

- A situação inversa verifica-se quando a obrigação está a ser transaccionada no mercado a prémio, ou seja, quando

$$P > VN$$.

- Uma das limitações desta medida deriva de ignorar as outras duas fontes de rendimento, ou seja, o reinvestimento do juro e as mais ou menos valias finais.

Taxa de rendimento até à maturidade

- Esta taxa, também designada por *yield to maturity* (YTM), corresponde à taxa interna de rentabilidade de um investimento em obrigações por considerar quer os ganhos ou perdas de capital resultantes da venda ou amortização da obrigação, quer o reinvestimento dos juros gerados pela mesma. Estes últimos são implicitamente reinvestidos à taxa interna de rentabilidade.

- Pode ser definida como a taxa de juro inerente à obrigação se o investidor a adquirir pelo preço actual e a mantiver na sua posse até à maturidade, momento em que recebe o valor do reembolso.

- Trata-se da taxa para a qual o valor actual dos fluxos financeiros de saída (preço de compra) iguala o valor actual dos fluxos financeiros de entrada (juros e valor de reembolso). Por isso, pode ser entendida como uma taxa de desconto.

Para ter um efectivo significado para um investidor, esta taxa pressupõe três hipóteses fundamentais:

- a obrigação é mantida até à maturidade na posse do investidor;
- não há qualquer incumprimento do serviço da dívida, isto é, o emitente consegue pagar todos os juros e o reembolso do capital atempadamente;
- os fluxos periódicos libertados (os juros recebidos) são imediatamente reinvestidos a uma taxa coincidente com a taxa interna de rentabilidade.

Formalmente, a taxa de rendimento até à maturidade (YTM) obtém-se da resolução da seguinte equação:

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{JC_t}{(1+YTM)^t} + \frac{VR}{(1+YTM)^n}$$

onde

P é o preço de mercado da obrigação (conhecido), e

$JC_t = JC$ é o juro de cupão, que se admite constante.

Por frequentemente se tratar de uma equação de grau superior a 2, o cálculo da YTM é feito por aproximações.

Tratando-se de obrigações com juros semestrais, todos os fluxos financeiros se expressam em semestres, pelo que a YTM, calculada de acordo com a expressão, é relativa a um semestre. A anualização far-se-á naturalmente recorrendo a

$$YTM_a = (1 + YTM_s)^2 - 1 \quad .$$

Exemplo

- Seja uma obrigação com maturidade de 3 anos, VR=1000€, JC=100€/anual e P=900€. Calcule as suas medidas de rentabilidade.

Temos:

1. $$j = \frac{JC}{VN} = \frac{100}{1000} = 10\%$$

2. $$TRC = \frac{JC}{P} = \frac{100}{900} = 11\%$$

3. $$YTM : 900 = \frac{100}{1+YTM} + \frac{100}{(1+YTM)^2} + \frac{100+1000}{(1+YTM)^3} \Leftrightarrow YTM = 14{,}3\%$$

Relação entre as 3 medidas

- As três medidas até agora apresentadas exibem determinadas relações entre si consoante o nível do preço de mercado a que a obrigação se encontra. Concretamente, quanto maior é o preço, menor é a YTM:

Preço da obrigação	Relação
Ao par	Taxa de cupão = TRC =YTM
A desconto	Taxa de cupão < TRC <YTM
A prémio	Taxa de cupão > TRC >YTM

Caso particular: YTM das Obrigações sem cupão

No caso das obrigações sem cupão, o cálculo da YTM permite obter a taxa de juro à vista, também designada *spot rate*, para o prazo da referida obrigação.

Repare-se que as taxas à vista são taxas de juro que os obrigacionistas vão efectivamente receber pelo empréstimo de fundos pelos diferentes períodos, desde que mantenham a obrigação em sua posse até à sua amortização.

Assim teremos: $$YTM = S_t : \quad P = \frac{VR}{(1+S_t)^t}$$

onde S_t é a taxa de juro à vista para uma obrigação com maturidade de t períodos

Taxas spot e taxa forward

- As taxas *spot* são muito importantes para a avaliação das obrigações com cupão.

- O papel das taxas de juro à vista na avaliação de obrigações é tão relevante que na inexistência de obrigações sem cupão para as várias maturidades são utilizadas técnicas algo complexas para inferir essas taxas *spot*.

- Conhecido o leque das taxas à vista é possível calcular as denominadas taxas de juro a prazo, também designadas *forward rates*. São taxas em que a data do compromisso e a data do empréstimo são diferentes.

- Na realidade, as taxas à vista, embora diferindo das taxas de juro para um prazo de um período (habitualmente um ano) existentes em cada um dos sucessivos períodos, isto é, das taxas de juro a prazo, acabam por aproximar-se da média geométrica destas últimas, ou seja:

$$(1+S_1)=(1+F_1) \quad \Leftrightarrow \quad S_1=F_1 \quad ,$$

$$(1+S_2)^2=(1+F_1)(1+F_2) \quad \Leftrightarrow \quad S_2=\sqrt{(1+F_1)(1+F_2)}-1 \quad ,$$

$$(1+S_3)^3=(1+F_1)(1+F_2)(1+F_3) \quad \Leftrightarrow \quad S_3=\sqrt[3]{(1+F_1)(1+F_2)(1+F_3)}-1,$$

……

- De uma forma geral, vem

$$S_t = \sqrt[t]{\prod_{i=1}^{t}(1+F_i)} - 1$$

onde F_i é a taxa de juro futura, no período i, para uma obrigação com uma maturidade de um período.

- Alternativamente, podemos obter as taxas a prazo, estabelecendo uma relação entre duas taxas à vista para períodos consecutivos

1. $(1+S_1)=(1+F_1) \quad \Leftrightarrow \quad F_1 = S_1$

2. $(1+S_2)^2 = (1+S_1)(1+F_2) \quad \Leftrightarrow \quad 1+F_2 = \dfrac{(1+S_2)^2}{1+S_1}$

…

t. $$F_t = \frac{(1+S_t)^t}{(1+S_{t-1})^{t-1}} - 1$$

- Um último reparo é importante. Quer as taxas a prazo quer as taxas à vista são únicas para cada prazo. Justifica-se assim a preferência pela sua utilização quando se pretende descrever a estrutura de prazos das taxas de juro, em detrimento das YTM.

Estrutura de prazos das taxas de juro

- É habitual estudar-se a estrutura de prazos das taxas de juro, entendendo-se esta como a relação que se estabelece entre as taxas de juro implícitas nos preços a que são transaccionadas as obrigações no mercado secundário e os respectivos prazos para o vencimento.

- Efectivamente, obrigações de diferentes maturidades têm preços diferentes e uma taxa de juro implícita associada, ou seja, uma diferente *yield to maturity*, também diferente.

Curvas de rendimento

- Representada graficamente, a estrutura de prazos das taxas de juro dá origem à designada curva de rendimentos, *yield curve*.

- Atendendo a que as *yields to maturity* acabam por ser taxas esperadas ou potenciais em resultado das hipóteses em que assentam, a estrutura de prazos das taxas de juro é muitas vezes representada pelo conjunto das taxas de juro à vista ou pelo conjunto das taxas de juro a prazo.

- Assim, a estrutura de prazos das taxas de juro pode ser definida como o espectro de *yields to maturity* calculadas a partir de um conjunto de obrigações de cupão zero para diferentes prazos de reembolso.

- Note-se que ao contrário das YTM, as taxas de juro à vista são efectivas.

- Por outro lado, e como vimos, as taxas de juro à vista para os diferentes prazos são as YTM de obrigações de cupão zero para o prazo correspondente. Acrescente-se ainda que quer as taxas à vista quer as taxas a prazo são únicas para cada prazo.

Teorias explicativas da estrutura de prazos das taxas de juro

- Da reflexão sobre a configuração da estrutura de prazos das taxas de juro surgiram algumas teorias explicativas da mesma.
- De entre as teorias tradicionais destacam-se a teoria das expectativas e a teoria da segmentação do mercado.

- A primeira sustenta que as taxas de juro a prazo representam uma opinião consensual do mercado em relação às taxas à vista esperadas no futuro parao período em causa. Assim, a estrutura de prazos das taxas de juro é representada por uma curva ascendente se os investidores prevêem taxas à vista esperadas superiores às actuais taxas à vista, e é representada por uma curva descendente se a generalidade do mercado espera que as taxas à vista venham a descer abaixo dos níveis actuais.
- A segunda assenta a sua explicação no fraccionamento institucional ou em segmentos do mercado em função do perfil de preferências de prazos dos investidores. A curva de rendimentos é portanto determinada pelas condições da procura e da oferta em cada segmento do mercado.

Figure 1

Possible Term Structure

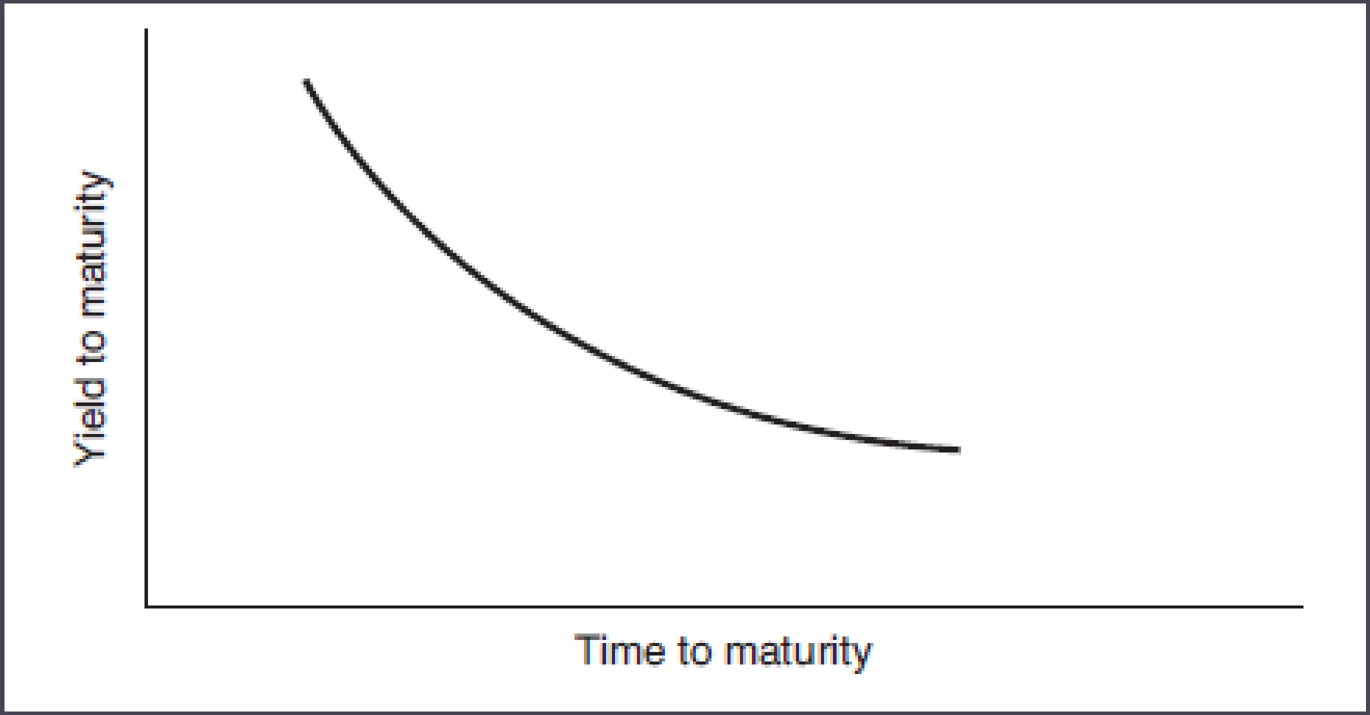


Figure 2

Possible Term Structure

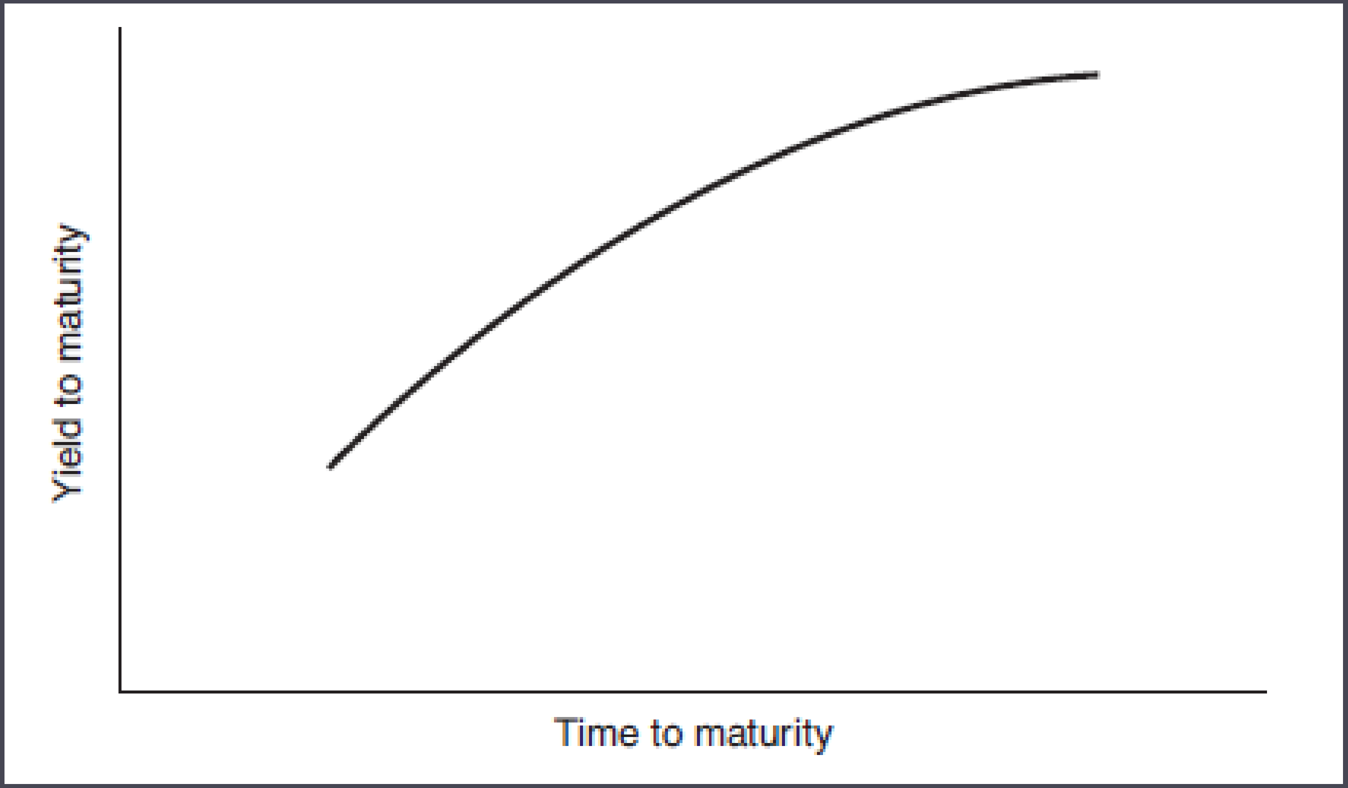


Figure 3

Possible term structure curves.

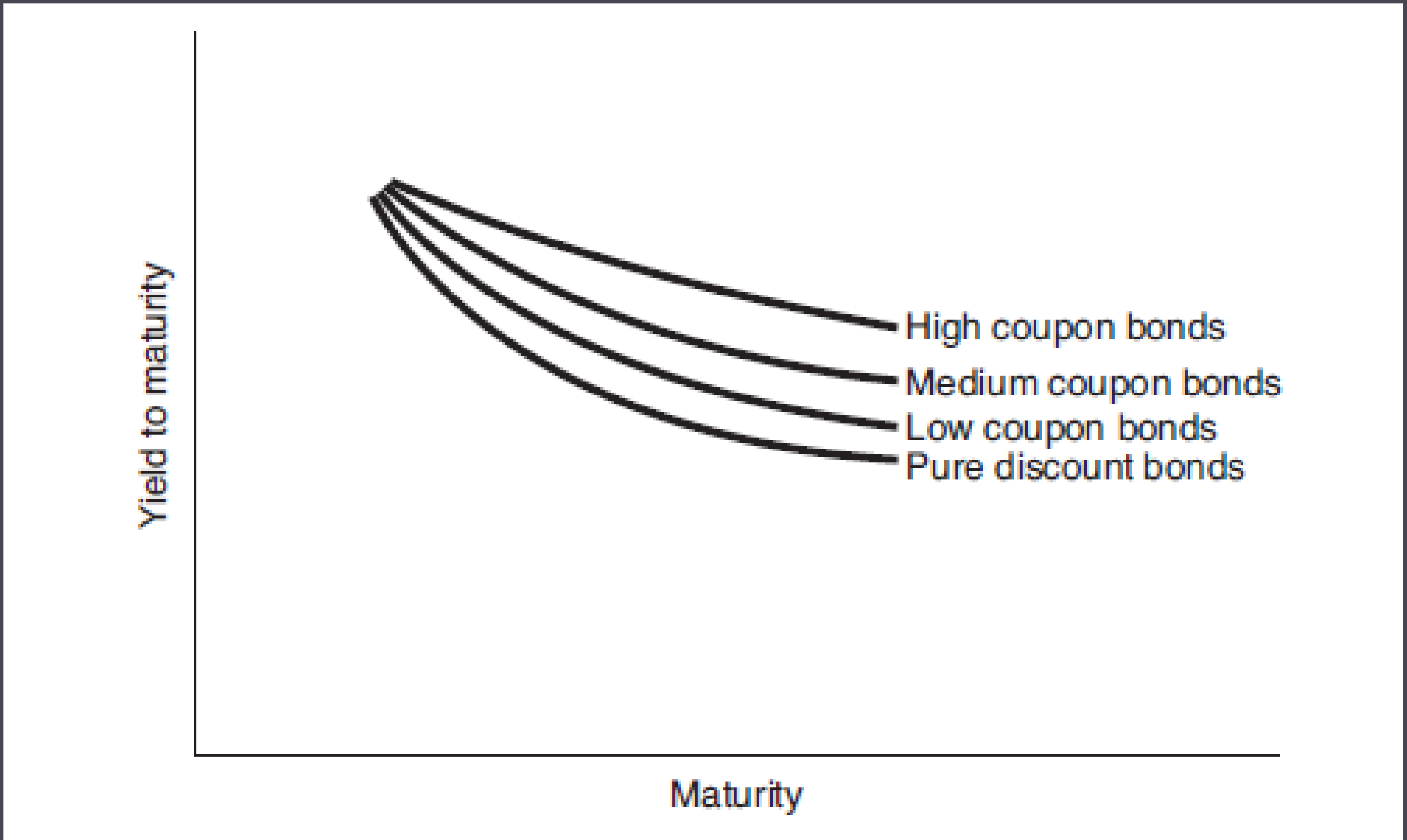
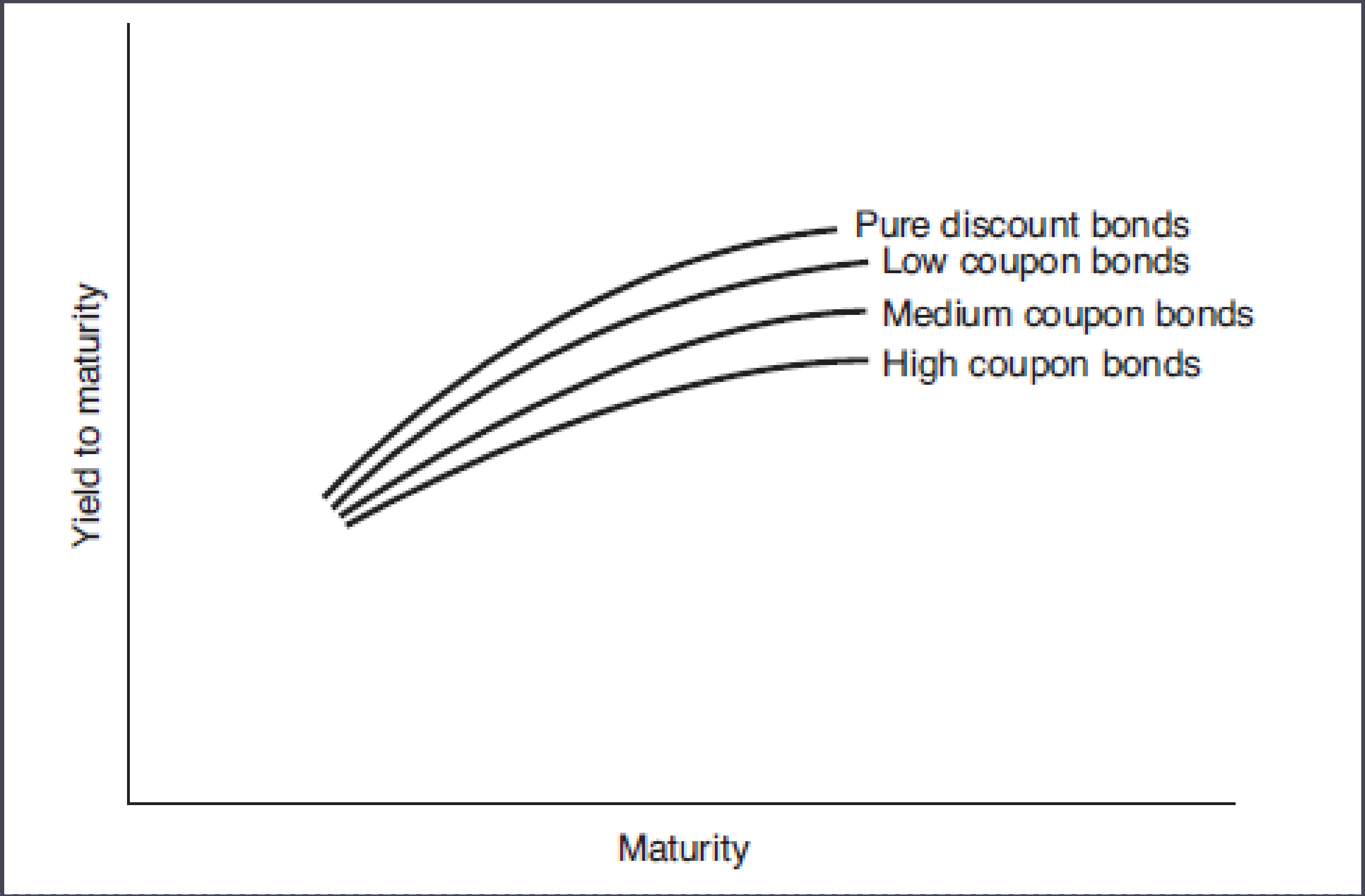


Figure 4

Possible term structure curves.



- Outras teorias, como a teoria do prémio de risco e a teoria do habitat preferido, apresentam explicações não tão extremadas relativamente às teorias anteriores, embora em qualquer delas não seja ignorado nem o papel das expectativas sobre as taxas futuras na determinação das taxas presentes, nem a existência de preferências dos investidores relativamente a certos perfis de prazos.

- Importa aqui também fazer referência às modernas abordagens estocásticas da estrutura de prazos das taxas de juro, as quais assumem como hipótese base que o comportamento das taxas de juro é governado por processos estocásticos.

Figure 5

Yield curves with liquidity premiums.

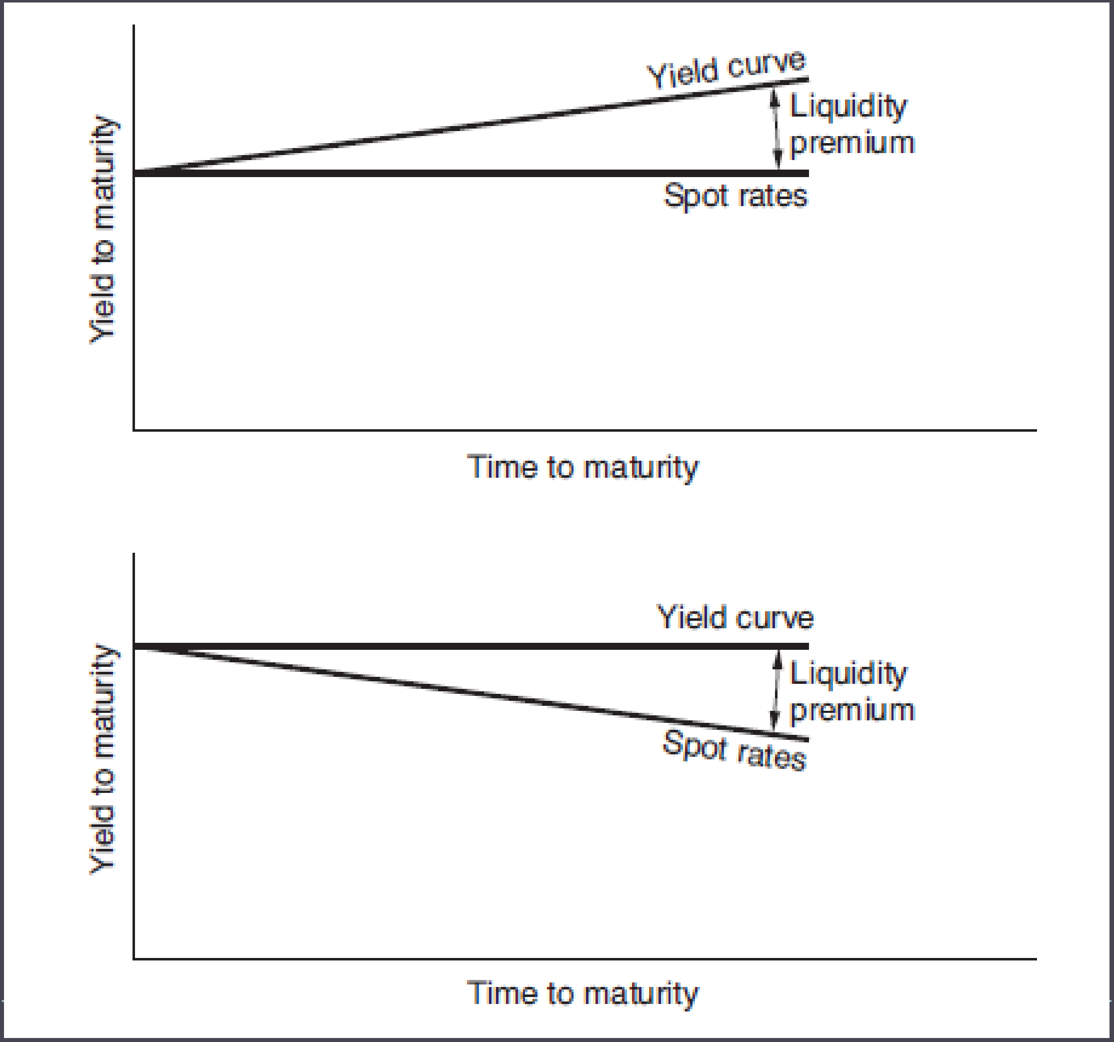
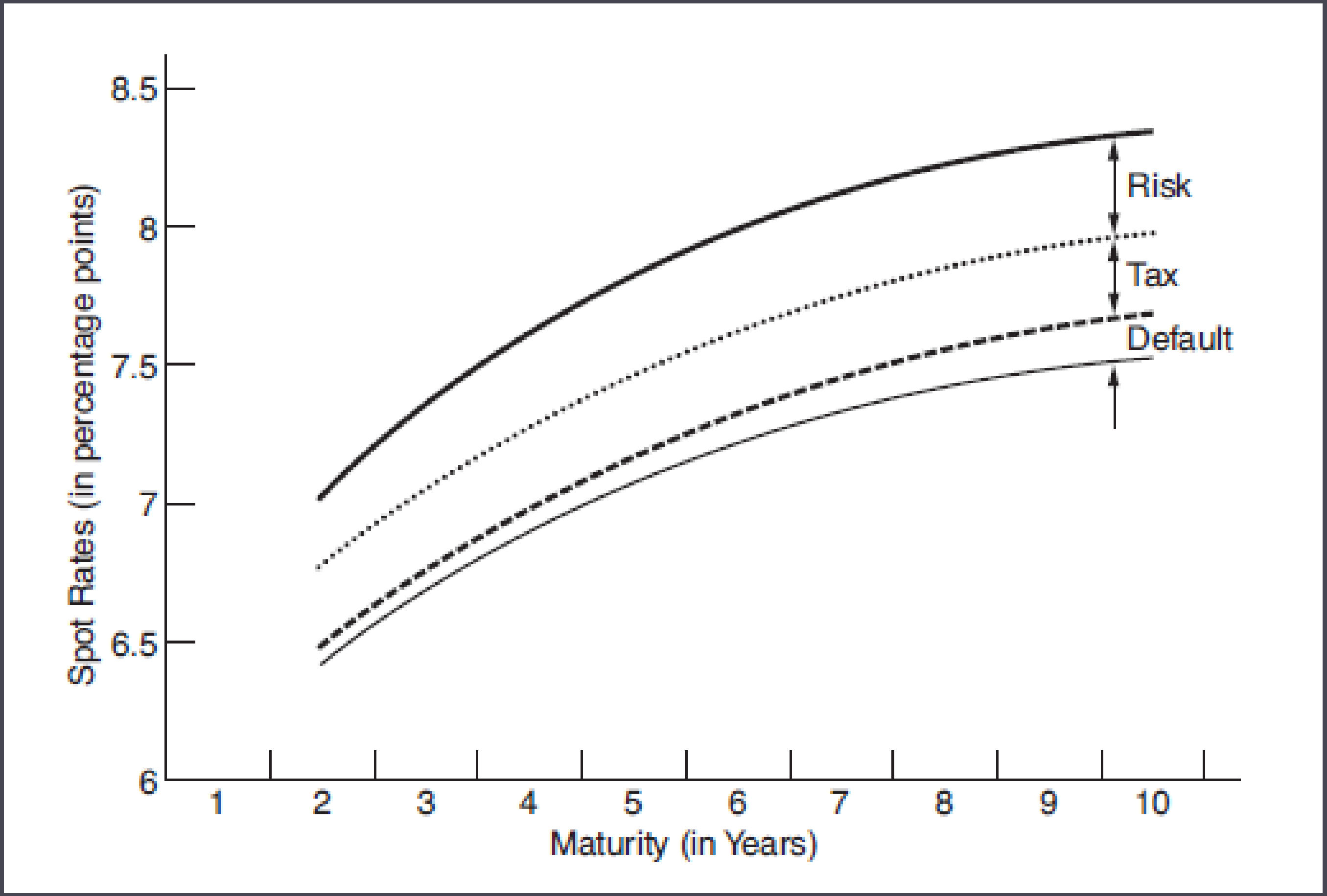


Figure 7

Spot rates for A-rated industrial bonds and for Treasuries.



Modelo de valor actual de obrigações

- O preço de equilíbrio das obrigações pode ser calculado a partir dos fluxos financeiros a que as mesmas dão origem. Assim:

$$P_e = \sum_{t=1}^{n} \frac{JC_t}{(1+y_t)^t} + \frac{VR}{(1+y_t)^n}$$

onde P_e é o preço de equilíbrio, que se pretende determinar, e y_t é a taxa de desconto ou taxa de atualização.

- O problema que surge neste tipo de modelo de avaliação, designado de modelo de fluxos financeiros actualizados, reside na taxa de desconto a utilizar para cada período, i.e., para y_t .

- É neste contexto que as taxa de juro à vista, as taxas de juro a prazo e as taxas de rendimento até à maturidade têm um papel decisivo na valorização de obrigações.

- Assim, para terminar o preço de equilíbrio pode utilizar-se, se forem conhecidas, as taxa à vista:

$$P_e = \sum_{t=1}^{n} \frac{JC_t}{(1+S_t)^t} + \frac{VR}{(1+S_n)^n}$$

Medidas do risco de taxa de juro

- Como em qualquer outro investimento, a análise de apoio à decisão não deve estar centrada exclusivamente no rendimento mas deve ter em atenção o risco.

- O investimento em obrigações comporta dois tipos de risco principais. São eles o risco de taxa de juro e o risco de crédito ou de incumprimento.

- Pode ainda considerar-se o risco de liquidez, o risco de reembolso antecipado, e o risco de convertibilidade.

- O **risco de taxa de juro** resulta da incerteza inerente à evolução e nível futuro das taxas de juro de mercado, podendo definir-se como a variabilidade do preço da obrigação em resposta a variações das taxas de juro.

- O **risco de crédito** está directamente relacionado com a incerteza quanto à capacidade do emitente para proceder ao pontual serviço da dívida e, portanto, quanto à evolução futura dos fluxos financeiros a receber pelo obrigacionista.

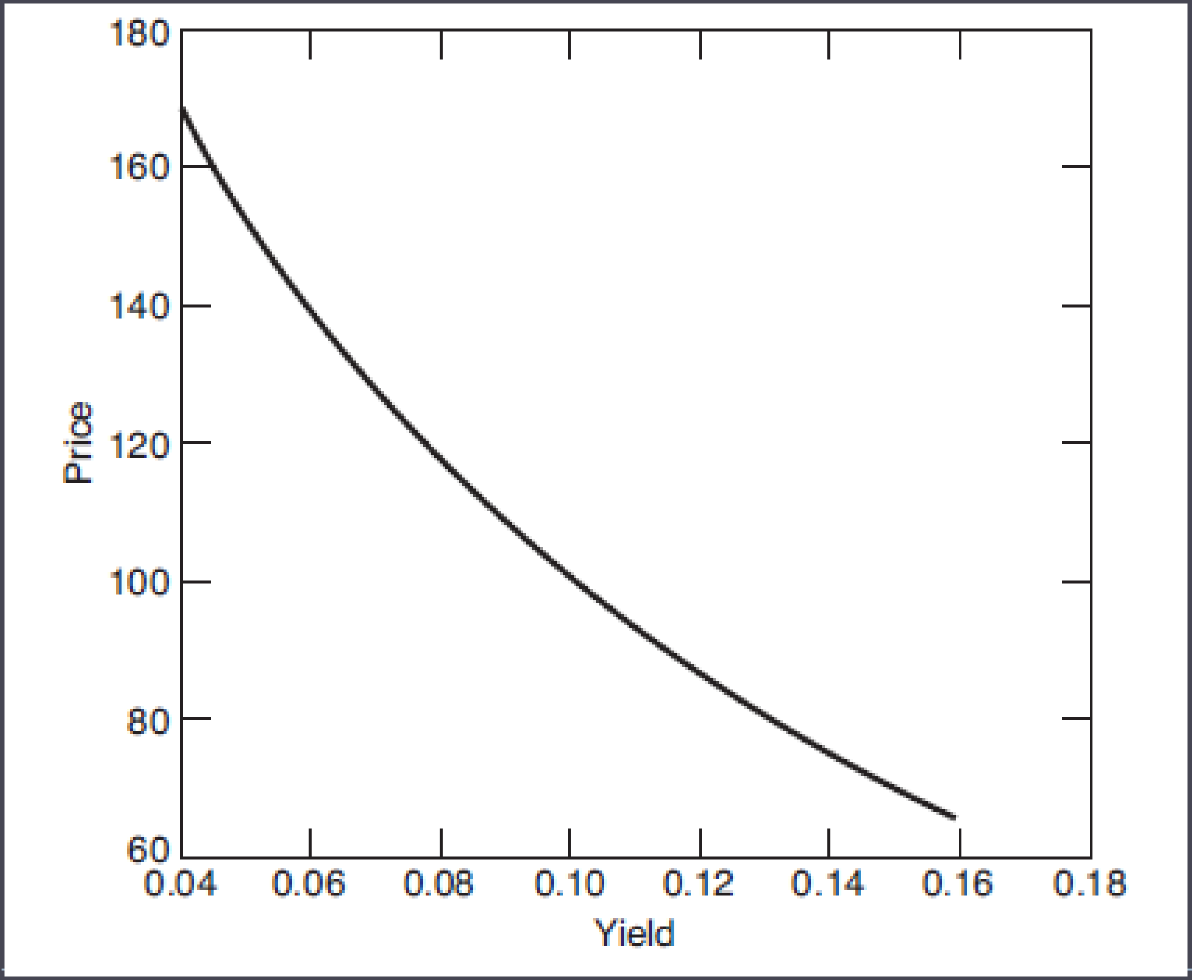
- Em relação ao **risco de crédito**, existe um indicador da probabilidade de pagamento atempado dos juros e do capital de um determinado empréstimo pela entidade emitente. Trata-se do *rating*, o qual reflecte a probabilidade de incumprimento com base na análise das perspectivas do emitente. Quanto maior for esta probabilidade, menor será a notação atribuída. Uma das mais conhecidas empresas internacionais de *rating* é a Moody's.

- Relativamente ao **risco de taxa de juro**, vejamos uma situação concreta em que ele se manifesta.
- Admita-se a emissão de obrigações de taxa fixa e que no momento posterior ao da emissão as taxas de juro de mercado **sobem** de forma sustentada em consequência de uma subida não esperada da taxa de inflação.
- Neste caso, a colocação de obrigações com características idênticas passará a ser efectuada a taxas de juro superiores às da emissão anterior.
- Consequentemente, os investidores iniciais confrontam-se com uma situação que lhes é penalizante pois a taxa de juro de cupão de que estão a usufruir é inferior.

- Em face disso, sentem-se motivados a vender os seus títulos no mercado secundário e a comprar obrigações emitidas posteriormente.
- À medida que este fenómeno se propaga, o preço das primeiras tende a descer até se encontrar um novo preço de equilíbrio que permita a um investidor, comprando a obrigação a esse nível, obter uma rentabilidade semelhante à proporcionada pela posse de uma obrigação recentemente emitida de características idênticas.
- Significa isto que existe uma **relação inversa** entre o preço de uma obrigação e a taxa de juro de mercado.

Figure 6

Graph of yield versus price.



- Daí ser habitual designar-se o risco inerente de risco de preço, embora em termos latos se trate do **risco de taxa de juro**.
- Isto porque é possível distinguir um segundo componente do risco de taxa de juro que advém da impossibilidade de se prever a taxa de juro a que poderão ser reinvestidos os juros periodicamente auferidos, designado por risco de reinvestimento.
- Conclusão: importa agora avaliar as características da obrigação que mais afectam este tipo de risco.

A maturidade

A maturidade afecta o risco de taxa de juro.

Quanto maior é a vida restante da obrigação, maior é a sensibilidade dos preços em relação à taxa de juro, sendo tudo o resto constante.

Isto implica que:

- caso se **preveja uma descida das taxas de juro**, os preços das obrigações de longo prazo subirão mais do que os das obrigações de curto prazo e, portanto, tendo em consideração apenas as mais ou menos valias, os investidores tenderão a preferir obrigações de longo prazo.
- inversamente, **prevendo-se uma tendência para a subida das taxas de juro**, será natural que os investidores dêem preferência às obrigações de curto prazo.

- Decorre deste raciocínio que a **maturidade** constitui uma medida do risco de taxa de juro.

- Contudo, enquanto medida do risco de taxa de juro, comporta uma grande **limitação**, uma vez que apenas considera o período relativo ao último fluxo financeiro a que a obrigação dá origem, ignorando todos os fluxos financeiros intermédios. Por este facto, é uma medida incompleta.

A duração

- Outra medida amplamente utilizada e divulgada para avaliar o risco de taxa de juro é designada por duração ou *duration*.

- Desenvolvida por Macaulay em 1938, consiste no cálculo da maturidade média da obrigação ponderada pela contribuição relativa de cada fluxo financeiro para a formação do preço, ou seja, representa a média ponderada das diferentes maturidades dos fluxos a que a obrigação dá origem.

- Isto porque é natural esperar que os fluxos imediatos tenham uma contribuição maior para o valor da obrigação do que os pagamentos mais longínquos no tempo.

- Formalmente podemos deduzir a expressão da duração a partir da expressão de determinação do preço de equilíbrio de uma obrigação.
- Seja

$$P_e = \frac{CF_1}{(1+YTM)} + \frac{CF_2}{(1+YTM)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+YTM)^n} = \frac{CF_1}{(1+y)} + \frac{CF_2}{(1+y)^2} + \ldots + \frac{CF_n}{(1+y)^n}$$

- onde CF_t , $t = 1,2,\ldots,n$ representa o fluxo financeiro (juro e reembolso) no período t, e y uma taxa de juro à vista constante para as diferentes maturidades .
- Admite-se, assim, que a curva de rendimentos é horizontal. Consequentemente, as variações da taxa de juro no mercado correspondem a deslocações paralelas da referida curva horizontal.

- Calcule-se a sensibilidade aproximada do preço face a variações (reduzidas) da taxa de juro

$$\frac{dP_e}{dy} = -\frac{CF_1}{(1+y)^2} - 2\frac{CF_2}{(1+y)^3} - \ldots - n\frac{CF_n}{(1+y)^{n+1}}$$

- Ou, pondo em evidência $-\frac{1}{(1+y)}$,

$$\frac{dP_e}{dy} = -\frac{1}{(1+y)}\left[\frac{CF_1}{(1+y)} + 2\frac{CF_2}{(1+y)^2} + \ldots + n\frac{CF_n}{(1+y)^n}\right]$$

- Dividindo ambos os membros da expressão anterior pelo preço P, obtemos a variação percentual do preço, face a variações da taxa de juro

$$\frac{dP_e}{dy}\frac{1}{P_e} = -\frac{1}{(1+y)}\underbrace{\left\{\frac{1}{P_e}\left[\frac{CF_1}{(1+y)} + 2\frac{CF_2}{(1+y)^2} + \ldots + n\frac{CF_n}{(1+y)^n}\right]\right\}}_{\text{MD}}$$

- A duração de Macaulay, de acordo com a definição dada anteriormente, habitualmente designada por MD, é dada pela expressão

$$MD = \frac{1}{P_e}\left[\frac{CF_1}{(1+y)} + 2\frac{CF_2}{(1+y)^2} + \ldots + n\frac{CF_n}{(1+y)^n}\right]$$

- ou

$$MD = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\,\frac{CF_t}{(1+y)^t}}{P_e}$$

- A sensibilidade percentual aproximada do preço face a variações da taxa de juro pode agora ser escrita da seguinte forma

$$\frac{dP_e}{dy}\frac{1}{P_e} = -\frac{1}{(1+y)}MD$$

- Utilizando a duração modificada de Macaulay, isto é, $MMD = \frac{MD}{(1+y)}$ vem

$$\frac{dP_e}{dy}\frac{1}{P_e} = -MMD$$

- Pondo em relevo a variação relativa do preço, ou seja,

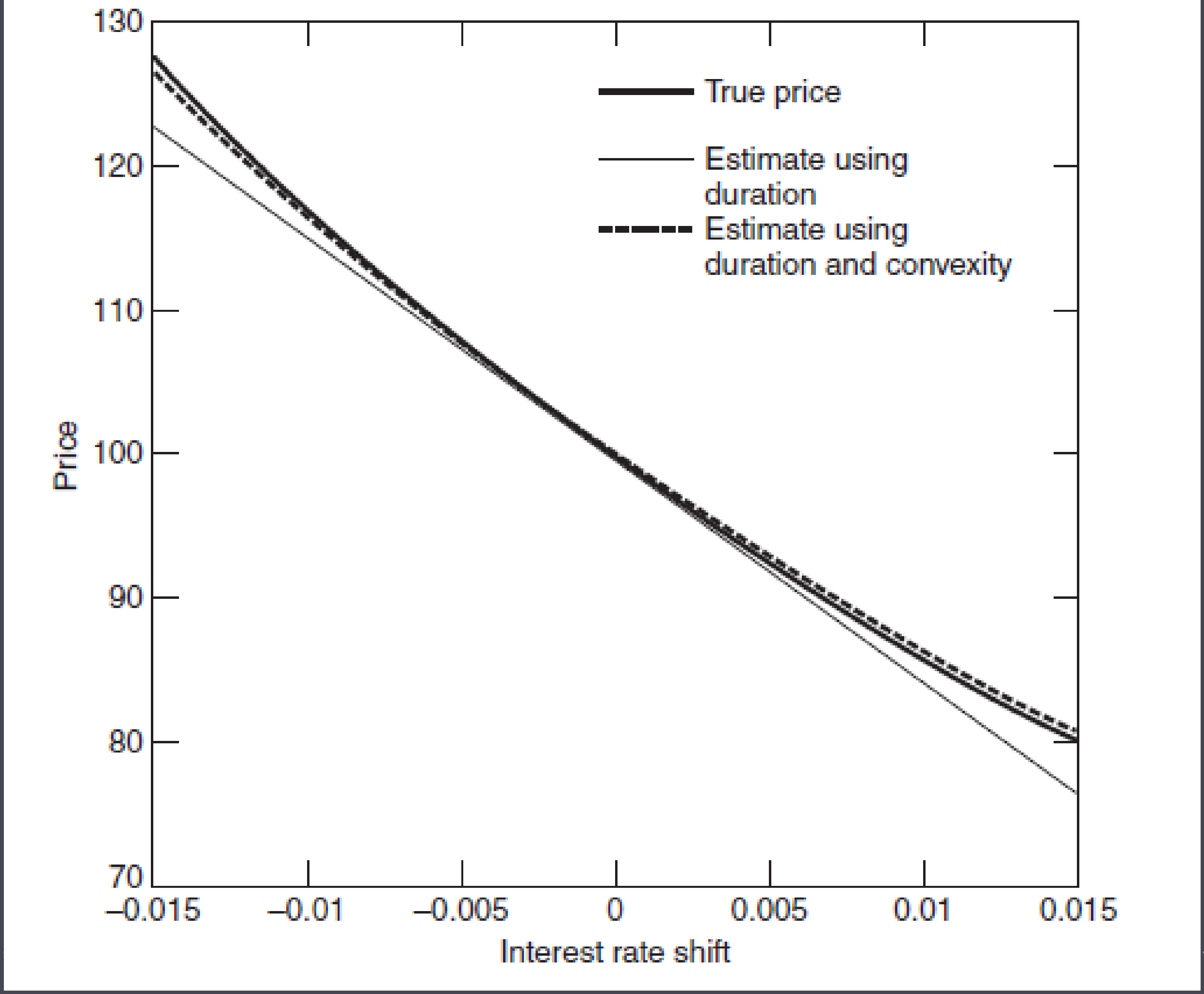
$$\frac{dP_e}{P_e} = -\frac{1}{(1+y)} MDdy$$

- Fica claro que a variação do preço é negativa e linearmente proporcional à variação da taxa de juro sendo o factor de proporcionalidade

$$-\frac{1}{(1+y)} MD$$

- Assim, uma variação positiva da taxa de juro provoca uma variação percentual negativa constante do preço da obrigação.
- Pelo facto de a relação estabelecida se tratar de uma relação linear, não consegue captar a verdadeira relação entre taxa de rendimento e preço, que é convexa.
- Assim, aparecem erros entre a variação percentual efectiva do preço e a variação percentual estimada obtida a partir da expressão anterior.

Actual price change and estimated price change.



- Os erros serão tanto maiores, quanto maiores forem as variações da taxa de juro:
  - A duração sobrestima variações percentuais negativas do preço, face a variações positivas da taxa de juro, e
  - A duração subestima variações percentuais positivas do preço, face a variações negativas da taxa de juro.
- Neste contexto, a duração acaba por ser uma medida não completamente adequada do risco de taxa de juro.

A convexidade

- A relação que efectivamente se estabelece entre o preço de uma obrigação e a taxa de juro é dada pela expressão de uma curva com concavidade voltada para cima, isto é, por uma **função convexa**.
- Consequentemente a quantificação da exposição de uma obrigação ao risco de taxa de juro deve ter em atenção o grau de curvatura da referida linha, designado por **convexidade**.
- A convexidade constitui assim uma medida do risco de taxa de juro que supera os erros apurados quando se estimam as variações percentuais dos preços face a variações da taxa de juro com base na duração.

Tendo presente a expressão da fórmula de Taylor

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

podemos escrever

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \quad \Leftrightarrow \quad dP_e = f'(a)dy + \frac{1}{2} f''(a)(dy)^2$$

- Assim tem-se

$$dP_e = \frac{dP_e}{dy}dy + \frac{1}{2}\frac{d^2P_e}{dy^2}(dy)^2$$

- Dividindo por P de equilíbrio, vem

$$\frac{dP_e}{P_e} = \frac{dP_e}{dy}\frac{1}{P_e}dy + \frac{1}{2}\frac{d^2P_e}{dy^2}\frac{1}{P_e}(dy)^2$$

- Fica em evidência que a variação percentual do preço pode ser calculada a partir da duração, $\frac{dP_e}{dy}\frac{1}{P_e} = -\frac{1}{(1+y)}MD$, e da convexidade, $\frac{1}{2}\frac{d^2P_e}{dy^2}\frac{1}{P_e} = CV$'

$$\frac{dP_e}{P_e} = -\frac{1}{(1+y)}MDdy + CV(dy)^2$$

- onde

$$\frac{d^2P_e}{dy^2} = \frac{1}{(1+y)^2}\left[\sum_{t=1}^{n} t(t+1)\frac{CF_t}{(1+y)^t}\right]$$

- Note-se que

$$CV_{anos} = \frac{CV_{semestres}}{2^2}$$

- Genericamente
- $$CV_{anos} = \frac{CV_{k \quad períodos \quad do \quad ano}}{k^2}$$

Proteção contra variações da estrutura de prazos da taxa de juto

- A volatilidade das taxas de juro e consequentes repercussões na rentabilidade de uma obrigação ou de uma carteira de obrigações, quer por via de variações no preço, quer por via de variações no rendimento proveniente do reinvestimento dos juros vencidos, embora de efeitos opostos, levou à necessidade de encontrar estratégias de investimento em obrigações a ela insensíveis.

- Neste sentido constata-se que uma carteira de obrigações com uma duração adequada é insensível a variações da taxa de juro.
- Na base do raciocínio está o facto de os efeitos da variação da taxa de juro funcionarem em sentidos opostos na rentabilidade.
- Assim, uma carteira diz-se **imunizada** se não for afectada pelas flutuações da taxa de juro para um determinado horizonte temporal considerado, dando origem a uma taxa de rendimento composta para o período de imunização igual à taxa de rentabilidade da carteira (conceito devido a Redington(1952)). Para a ideia se tornar mais clara vejamos duas situações possíveis.

Imunização de uma carteira constituída por um único tipo de obrigação

- O resultado fundamental relativamente à detenção de uma carteira constituída por um único tipo de obrigações é que ela torna-se imune a variações da taxa de juro, isto é, o efeito destas ao nível do preço e ao nível do juro compensam-se se o investimento for continuamente mantido por um período coincidente com a duração da obrigação.

- Seja a obrigação tipo A e um compromisso em t, então a obrigação deve ser detida por período correspondente à sua duração

$$h_{tI} = MD_A$$

- onde h_{tI} é o período de detenção de investimento (*investment holding period*).

- Garante-se desta forma uma determinada taxa de rendimento que mais não é do que a taxa de cupão caso a obrigação seja adquirida ao preço de emissão.

- Quando subjacente ao investimento existe uma determinada responsabilidade futura a que se pretende dar resposta, aquela conclusão é de extrema importância.

Imunização de uma carteira constituída por vários tipos de obrigações

- Em presença de uma carteira constituída por vários tipos de obrigações, é necessário reter que ela pode ser imunizada essencialmente através da selecção de obrigações de tal forma que a média ponderada das suas durações iguale a duração da responsabilidade que possa ter por trás.

- Seja as obrigação tipo A, tipo B, tipo C, …. Genericamente, a duração da carteira vem

$$MD_p = \frac{V_A MD_A + V_B MD_B + \ldots}{V_A + V_B + \ldots}$$

- onde MD_p representa a duração da carteira, e

- $MD_i \quad i = A, B, C, \ldots$ representam as durações das obrigações A, B, C, … e $V_i \quad i = A, B, C, \ldots$ representam os montantes investidos respectivamente nas obrigações A, B, ...

- Estamos assim perante uma estratégia de imunização contra o risco de taxa de juro que equipara a duração da carteira de activos à duração das responsabilidades, também designada por *duration-matching immunization strategy*, ou seja

$$MD_p = h_{tI}$$

- Atente-se, no entanto, que a imunização assim conseguida exige um ajustamento periódico da carteira em consequência quer das alterações nas durações das obrigações que a compõem com o passar do tempo, quer das alterações nas durações das obrigações que a compõem em resultado das variações nas yields to maturity.

Críticas

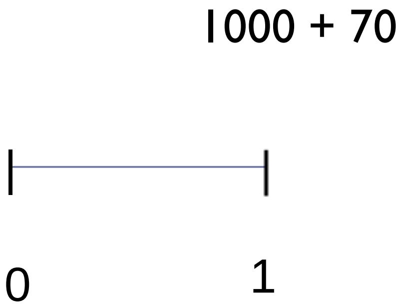
- 1. A imunização exige um ajustamento periódico o que implica custos de transação;
- 2. Necessidade de unidades fracionárias dos diversos tipos de obrigações;
- 3. Tem implícito uma estrutura de prazos das taxas de juro horizontal (no cálculo das durações).

Exemplo

- Suponha que um gestor de uma carteira de obrigações tem de efectuar um pagamento único de 1000 000 euros daqui a 2 anos.
- Atendendo a isso, ele vai investir numa carteira de obrigações com igual duração com vista a garantir a referida verba daqui a 2 anos.
- Trata-se de imunizar a carteira face ao risco de taxa de juro.
- Existem no mercado duas obrigações com as seguintes características.

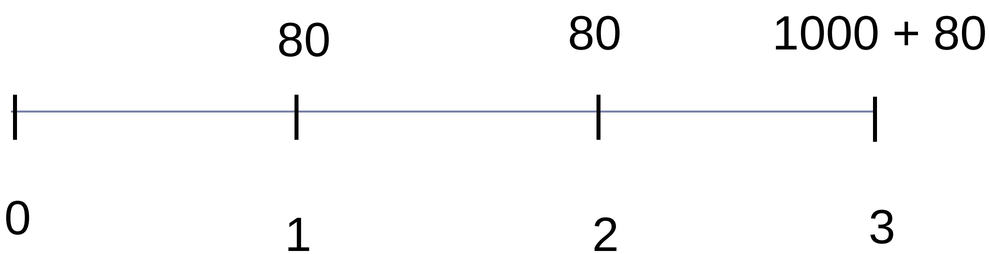
Obrigação	Prazo (anos)	Duração (anos)	VN (euros)	Cupão anual (euros)	Cotação (euros)	Yield (%)
A	1	1	1000	70	972,73	10%
B	3	2,78	1000	80	950,3	10%

- A:



$y_A = 10\%$

- B:



$y_B = 10\%$

- Assim, o gestor vai fazer

$$\begin{cases} x_A \times 1 + x_B \times 2{,}78 = 2 \\ x_A + x_B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0{,}4382 \\ x_B = 0{,}5618 \end{cases}$$

- onde

$$x_i = \frac{V_i}{\sum_i V_i} \quad i = A, B$$

- O montante a investir hoje é

$$\frac{1000000}{(1{,}1)^2} = 826446 \text{ euros}$$

- Montante a investir nas obrigações A e B

$0,4382 \times 826446 = 362149$ euros

$0,5618 \times 826446 = 464298$ euros

- Número de acções a adquirir de A e B

$$N_A = 362149 / 972{,}73 = 372{,}3 \text{ obrigações}$$

$$N_B = 464298 / 950{,}3 = 488{,}6 \text{ obrigações}$$

- Vejamos o valor da carteira no fim dos dois anos, assumindo dois diferentes níveis da taxa de juro (yield) em relação ao valor inicial de 10%.

Items da carteira	y		
	8%	10%	12%
Valor do investimento na obrigação A no fim do 1º ano reinvestido à taxa y por 1 ano: 372,3x1070x(1+y)	430 230 €	438 197 €	446 164 €
Valor dos cupões recebidos da obrigação B em t=1 reinvestido à taxa y por 1 ano: 488,6x80x(1+y)	42 215 €	42 997 €	43 779 €
Valor dos cupões recebidos da obrigação B em t=2: 488,6X80	39 088 €	39 088€	39 088€
Valor da venda das obrigações B em t=2: 488,6 x(1080/1+y)	488 600 €	479 716 €	471 150 €
Valor da carteira em t=2	1 000 133 €	999 998 €	1 000 181 €