



# Cap. 4 Análise de Decisão

Sistemas de Apoio à Decisão

Optativa



**LISBON  
SCHOOL OF  
ECONOMICS &  
MANAGEMENT**  
UNIVERSIDADE DE LISBOA

## Análise de Decisão



- Análise de Decisão
  - Modelação
  - Critérios de Decisão
    - Não Probabilísticos
    - Probabilísticos
- Decisão Sem Incorporação de Experiência
- Decisão Com Incorporação de Experiência
- Árvores de Decisão
- Resolução com o *Tree Plan/Excel*

2014/15 M. Cândida Mourão 2

## Análise de Decisão - Modelação



### 1) Ações: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

- Identificar e enumerar TODAS as Ações de forma
  - EXAUSTIVA – não ignorar ações
  - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou possibilidade de escolha múltipla
- **Objetivo** – escolher uma e uma só ação de  $A$

### 2) Estados da Natureza: $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$

- Identificar e enumerar TODOS os Estados da Natureza de forma
  - EXAUSTIVA – não ignorar estados da natureza
  - EXCLUSIVA – evitar duplicações ou ambiguidades
- Ocorre um e um só estado!
- O decisor só conhece o estado depois de escolhida a ação

## Análise de Decisão - Exemplo



### Exemplo Protótipo - (H&L, pg. 673)

The GOFERBROKE COMPANY owns a tract of land that may contain oil. A consulting geologist has reported to management that she believes there is 1 chance in 4 of oil.

Because of this prospect, another oil company has offered to purchase the land for \$90,000. However, Goferbroke is considering holding the land in order to drill for oil itself. The cost of drilling is \$100,000. If oil is found, the resulting expected revenue will be \$800,000, so the company's expected profit (after deducting the cost of drilling) will be \$700,000. A loss of \$100,000 (the drilling cost) will be incurred if the land is dry (no oil).

However, before deciding whether to drill or sell, another option is to conduct a detailed seismic survey of the land to obtain a better estimate of the probability of finding oil. Section 15.3 discusses this case of *decision making with experimentation*, at which point the necessary additional data will be provided.

## Análise de Decisão - Modelação



### 3) Função Ganho (Proveito)

- Avaliar as ações em função das consequências que arrastam e das preferências do decisor por tais consequências
- $p(a_i, \theta_k)$  ganho de tomar a ação  $a_i \in A$  e o estado da natureza ser  $\theta_k \in \Theta$  ( $i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$ )
- Eliminar do estudo eventuais **ações dominadas!**
- **CrITÉrios de Decisão**
  - Não Probabilísticos: **MAXIMIN**
  - Probabilísticos: **Bayes**; Máxima Verossimilhança

## Decisão Sem Experiência - Exemplo



- Identificar a matriz de ganhos para o exemplo protótipo

Ações:

$a_1$  – manter o terreno e explorar

$a_2$  – vender o terreno

Estados da natureza:

$\theta_1$  – existe petróleo

$\theta_2$  – não existe petróleo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$
$a_1$	700	-100
$a_2$	90	90

## Análise de Decisão



### Problemas a responder

- Que ação escolher?
- Qual o ganho esperado da ação escolhida?
- Valerá a pena efetuar uma experiência (sondagem; estudo de mercado; ...) para diminuir a incerteza?
  - Será que o aumento no ganho esperado resultante da realização de uma experiência compensa o custo da mesma?
  - Qual o Preço de reduzir a incerteza?
- Qual o preço que estamos dispostos a pagar para eliminar a incerteza?

## Decisão Sem Experiência



### Critério de Decisão Não Probabilístico

#### Princípio de Decisão MAXIMIN (Wald, 1945)

- Critério pessimista ➡ a natureza “é do contra”! O estado de natureza será o pior possível para a ação que o decisor escolher.
- Cada Ação ➡ o ganho mínimo

natureza é adversa

Ação maximin ➡ maximiza o ganho mínimo

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \min_{1 \leq k \leq n} \{p(a_i, \theta_k)\} \right\}$$



## Decisão Sem Experiência



### Princípio de Decisão **MAXIMIN**

#### Vantagens

- Protege o decisor contra o “pior caso”
- Garante um ganho mínimo
- Não permite perdas disparatadas

#### Adapta-se a situações de

- Forte aversão ao risco
  - Concorrência agressiva
- Determinar a ação maximin para o exemplo protótipo

## Decisão Sem Experiência - Exemplo



- Ação maximin para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	min
$a_1$	700	-100	-100
$a_2$	90	90	90

← máx

**R:** a ação maximin é  $\tilde{a} = a_2$ !

## Decisão Sem Experiência - Exemplo



Considerando a matriz de ganhos seguinte determine a correspondente ação maximin e comente o resultado

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$
$a_1$	-80	-90	-50
$a_2$	220	300	-100

**R:** a ação maximin é  $\tilde{a} = a_1$ !

## Decisão Sem Experiência



### Critério de Decisão Probabilístico

#### Princípio de Decisão Bayes

Informação do decisor sobre os estados da natureza (v.a.) traduzida por uma distribuição de probabilidade – distribuição *a priori*

$$h_{\theta}(k) = P[\theta = \theta_k] \quad \text{probabilidade } a \text{ priori do estado } \theta_k$$

**Princípio de Bayes** - ação que maximiza o ganho esperado (**risco de Bayes**), ou seja, a ação correspondente a:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(a_i, \theta_k) \right\} = \max_{1 \leq i \leq m} \{E[p(a_i, \theta)]\}$$

## Decisão Sem Experiência



- Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_\theta(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

## Decisão Sem Experiência



- Determinar a ação Bayes para o exemplo protótipo

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_\theta(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

$$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times (-100) = 100 \quad \leftarrow$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90$$

$$a_h = a_1!$$

## Decisão Com Experiência



- Valerá a pena recorrer a experimentação para **diminuir a incerteza**?
- O **valor esperado da informação perfeita (EVPI)** = valor que o decisor paga para **retirar** a incerteza, para ter a certeza de qual dos estados se irá observar!
- $a_h$  = ação Bayes (sem experiência), com ganho esperado  $E[p(a_h, \theta)]$

$$EVPI = EP - E[p(a_h, \theta)]$$

com  $EP$  = ganho esperado com informação perfeita (IP), logo:

$$EP = \sum_{k=1}^n h_{\theta}(k) p(\tilde{a}^k, \theta_k)$$

e  $\tilde{a}^k$  é a ação a escolher se o estado da natureza é  $\theta_k$  (melhor ação para  $\theta_k$ )

## Valor Esperado da Informação Perfeita



- Valor esperado da Informação Perfeita - **EVPI**

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_{\theta}(k)$	1/4	3/4	1

Valor a pagar para **eliminar** a incerteza!

- Se souber que  $\theta = \theta_1$  escolho  com ganho
- Se souber que  $\theta = \theta_2$  escolho  com ganho

$$EVPI =$$

## Valor Esperado da Informação Perfeita



- Valor esperado da Informação Perfeita - *EVPI*

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$h_\theta(k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Valor a pagar para eliminar a incerteza!

- Se souber que  $\theta = \theta_1$  escolho  $a_1$  com ganho 700
  - Se souber que  $\theta = \theta_2$  escolho  $a_2$  com ganho 90
- $$\Rightarrow EP = \frac{1}{4} \times 700 + \frac{3}{4} \times 90 = 242,5$$

$$EVPI = 242,5 - 100 = 142,5$$

## Decisão Com Experiência



- Se realizar uma experiência (diminuir a incerteza) a ação a escolher deve depender do resultado dessa experiência. O decisor deve ter uma função de decisão que o ajude a escolher em função dos resultados da experiência.
- **Questões:**
  - Deve ou não ser feita a experiência?
  - Se optar pela experiência que ação escolher, em função do resultado da experiência?
- Optando pela **função de decisão Bayes**, a ação é escolhida aplicando o princípio de Bayes ao ganho esperado para as probabilidades revistas (**a posteriori**), tendo em conta cada um dos possíveis resultados da experiência e as probabilidades destes resultados!

## Decisão Com Experiência



Seja:

- $S$  v.a. → informação adicional da experiência
- $h_{\theta}(k)$  as probabilidades *a priori*
- $Q_{S|\theta=\theta_k}(s) = P(S = s|\theta = \theta_k)$  a **função de verosimilhança** da experiência  

  
 credibilidade da experiência em face de resultados passados
- $P_{\theta S}(\theta_k, s) = P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$  é a f.d. conjunta do par aleatório  $(\theta, S)$
- $P(S = s) = \sum_{k=1}^n P(S = s|\theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)$  é a f.d. marginal da v.a.  $S$

## Decisão Com Experiência



### ➤ Método:

- 1) Calcular as probabilidades *a posteriori*

$$P(\theta = \theta_k | S = s) = \frac{P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)}{\sum_{k=1}^n [P(S = s | \theta = \theta_k) P(\theta = \theta_k)]}$$

[Excel](#)

- As probabilidades *a posteriori* representam a probabilidade de cada estado, condicionada ao resultado da experiência.
- 2) Para cada resultado possível da experiência, e tendo em conta as probabilidades *a posteriori*, determinar a ação Bayes
  - 3) Calcular o ganho esperado da experiência, tendo em conta a f.d. marginal de  $S$  e as ações Bayes para cada resultado possível.

### ➤ Árvores de Decisão – alternativa!

## Decisão Com Experiência - Exemplo



### Exemplo Protótipo (continuação - H&L pág. 680)

Considere-se que é possível a elaboração de testes sísmicos ao terreno, para avaliar a possível existência de petróleo no subsolo, a um custo de 30 000 u.m..

Deste teste pode obter-se um de dois resultados: FSS (é provável a existência de petróleo) ou USS (não é provável a existência de petróleo).

Da observação passada em áreas semelhantes sabe-se que: o teste acertou, sempre que existia petróleo, em 60% dos casos; e acertou na não existência de petróleo em 80% dos casos

- Valerá a pena efectuar um teste sísmico?
- Qual a acção que deve ser escolhida para cada um dos resultados do teste?
- Qual o valor esperado do ganho associado à realização do teste?

## Decisão Com Experiência - Exemplo



Determinar a acção Bayes tendo em conta o resultado obtido:

- Calcular as probabilidades *a posteriori* para cada resultado da experiência;
- Identificar a acção Bayes com as probabilidades *a posteriori* de  $\theta_k$

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
Prob <i>a posteriori</i>			1

## Decisão Com Experiência - Exemplo



➤ Se o teste deu como resultado  $S='FSS'$

Excel  
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = 'FSS']$			

$E[p(a_1, \theta)] =$

$E[p(a_2, \theta)] =$

2014/15
M Cândida Mourão
23

## Decisão Com Experiência - Exemplo



➤ Se o teste deu como resultado  $S='FSS'$

Excel  
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta = \theta_k / S = 'FSS']$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$E[p(a_1, \theta)] = \frac{1}{2} \times 700 + \frac{1}{2} \times (-100) = 300$  ←

$E[p(a_2, \theta)] = 90$

Se for efetuado o teste e  $S='FSS'$ ,  $a_h=a_1!$

2014/15
M Cândida Mourão
24

## Decisão Com Experiência - Exemplo



- Se o teste deu como resultado  $S='USS'$

[Excel](#)  
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'USS']$			

$$E[p(a_1, \theta)] =$$

$$E[p(a_2, \theta)] =$$

2014/15

M Cândida Mourão

25

## Decisão Com Experiência - Exemplo



- Se o teste deu como resultado  $S='USS'$

[Excel](#)  
(prob. a posteriori)

$p(a_i, \theta_k)$	$\theta_1$	$\theta_2$	
$a_1$	700	-100	
$a_2$	90	90	
$P[\theta = \theta_k/S = 'USS']$	0,14	0,86	1

$$E[p(a_1, \theta)] = 0,14 \times 700 + 0,86 \times (-100) = 12$$

$$E[p(a_2, \theta)] = 90 \quad \leftarrow$$

Se for efetuado o teste e  $S='USS'$ ,  $a_h = a_2!$

2014/15

M Cândida Mourão

26



## Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

[Excel](#)  
 (f.d. marginal de S)

$S$	$FSS$	$USS$
Ação Bayes	$a_1$	$a_2$
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$		

$EVE =$

R:

2014/15
M Cândida Mourão
27



## Decisão Com Experiência - Exemplo

➤ Ganho Esperado da Experiência

[Excel](#)  
 (f.d. marginal de S)

$S$	$FSS$	$USS$
Ação Bayes	$a_1$	$a_2$
Ganho Esperado	300	90
$P[S = s]$		

$EVE = 0,3 \times 300 + 0,7 \times 90 - 100 = 53$  (em 1000 u.m.)

R: Vale a pena fazer o teste, que custa 30 000 u.m.!

2014/15
M Cândida Mourão
28

# Árvores de Decisão



Usam-se quando:

- 1) Existem ações sequenciais no tempo (Experiências,...)
- 2) Estados de natureza com probabilidades associadas distintas

**Árvore de Decisão** - 2 tipos de nodos:

- Nodos de Decisão** – a escolha do caminho a seguir é do decisor
- Nodos Causais** (ou aleatórios) – a determinação do caminho é em função de acontecimentos que o decisor não controla

*Excel / TreePlan*