

Mestrado em Matemática Financeira

Cálculo Estocástico

Teste modelo

(consulta limitada a 5 folhas escritas pelo aluno - 10 páginas A4)

2014/2015

Duração: 50 minutos (teste) + texto de 4 páginas (a entregar no dia 14 de maio)

Justifique todas as respostas

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade onde está definido um movimento Browniano B . Considere o processo M , definido por $M_t = B_t^3 - 3tB_t$.

Mostre que M é uma martingala, justificando convenientemente (sugestão: pode usar a fórmula de Itô).

2. Considere que pretende propor uma equação diferencial estocástica para modelar a evolução do preço S_t de um activo financeiro (uma acção ou um índice) e ajustar esse modelo aos dados históricos

$$S_0 = 2.50, S_1 = 2.67, S_2 = 2.64, S_3 = 3.54, S_4 = 3.57, S_5 = 3.80, S_6 = \dots, \dots$$

Para além destes dados históricos, suponha também que foram estimadas a taxa média de retorno do activo $k = 0.08$, a volatilidade associada ao activo $\sigma = 0.15$, a taxa de juro sem risco $r = 0.05$ e a taxa de inflação $I = 0.02$.

a) Qual a equação diferencial estocástica que propõe e porquê? Quais os parâmetros estimados que são relevantes para o modelo proposto ?

b) Resolva a equação diferencial estocástica proposta na alínea a) e determine a distribuição de S_t , para $t > 0$.

c) Suponha que trabalha para uma instituição financeira que lhe pede para apresentar um pequeno relatório sobre a adequação do modelo $S_t = \sigma B_t$, onde σ é constante e B_t é um movimento Browniano. Quais seriam os seus principais comentários e críticas a este modelo?

3. Considere os integrais estocásticos $\int_0^T u_s dB_s$ e $\int_0^T v_s dB_s$.

a) Quais as condições que o processo u deve satisfazer para que $\int_0^T u_s dB_s$ esteja bem definido? Diga também, muito resumidamente, como se define o integral estocástico $\int_0^T u_s dB_s$ a partir de integrais de processo simples.

b) Supondo que existem constantes A e B tais que

$$A + \int_0^T u_s dB_s = B + \int_0^T v_s dB_s, \quad q.c.,$$

mostre que $A = B$ e

$$u_s(\omega) = v_t(\omega) \quad \text{quase certamente em } [0, T] \times \Omega.$$

4. Na última questão será solicitado ao aluno que escreva um texto (a entregar separadamente, até ao dia 14 de maio de 2015), onde o aluno deverá descrever um pequeno modelo (ou equação diferencial estocástica ou aplicação financeira) e apresentar uma pequena lista de referências bibliográficas (publicações e artigos científicos) relevantes para o estudo do modelo em causa. Na bibliografia recomendada, o aluno poderá encontrar algumas referências, mas recomenda-se também a consulta de bases de dados bibliográficos e da Internet.

Os aspectos concretos a focar no texto serão revelados apenas no dia do teste.

Observação: O texto deve ter, no máximo, 4 páginas A4 (não contando com as referências bibliográficas).