Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2013/2014
Época de Recurso: 24 de Junho de 2014
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{2}{|x^2-2|} > 1\right\}$ e $B = \left\{\ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos e indique, justificando, se A é um conjunto aberto.

(b) Indique o conjunto dos pontos de acumulação de A, de B e de $A \cap B$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists x \in B : x \leq b, \ \ \forall b \in B$;

ii. $\exists x \in \mathbb{R} : x \geq b, \ \ \forall b \in B$;

iii. $\forall a \in A \ \exists \epsilon > 0 :]a-\epsilon, a+\epsilon[\subseteq A$;

(4,0) 2. (a) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{n+3}-2^n}{3^{n+1}+2^n} + \sqrt[n]{\frac{(n+2)!}{n!+1}}\right)$.

(b) Calcule a área do domínio plano limitado pelo gráfico da função $f(x) = \ln(x)$ e pelas rectas de equação $y = 1 - x$ e $y = 1$.

(4,5) 3. Dado $k \in \mathbb{R}^+$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{kx} \frac{1}{t^2+3t+2}\,dt & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\left(e - e^{x^2+1}\right)}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso exista, um valor para $k \in \mathbb{R}^+$ de forma a que $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Existe $k \in \mathbb{R}^+$ para o qual f é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

(c) Considere $k = 1$ e escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 1$;

(2,0) 4. Considere $f : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ uma função contínua tal que $f(-1) = f(1) = \frac{\pi}{4}$.

(a) A equação $f(x) - x = 1$ tem solução em $[-1, 1]$? Justifique.

(b) Sendo v_n a sucessão definida por $v_n = \tan\left(f\left(\dfrac{1-n^2}{n^2}\right)\right)$ indique, justificando, o valor de $\lim v_n$.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^3 \frac{(e^3 - e^x)\ln(1+\sqrt[3]{x})}{(9x - x^3)^\alpha}\,dx$$

(2,5) 6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$ tal que f' é crescente. Prove que se $f(a) = f(b)$ então, para todo $x \in]a, b[$, $f(x) \leq f(b)$.