Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2013/2014
Época de Recurso: 29 de Janeiro de 2014
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : \ln(2x^2) \geq \ln(1-x)\}$ e $B = \mathbb{R}^+ \cap \{x \in \mathbb{R} : \sin(\pi x) \geq 1\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o supremo, ínfimo, máximo e mínimo, caso existam, do conjunto B.

(c) Calcule a fronteira de B, a aderência de $\mathbb{R}\backslash B$ e indique, justificando, se B é um conjunto compacto.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall \epsilon > 0,\ ]1-\epsilon, 1+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$ e $\exists \epsilon > 0 :\ ]1/2-\epsilon, 1/2+\epsilon[\cap A = \emptyset$;

ii. $\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, $(\exists \lim a_n \Rightarrow \lim a_n \in A)$;

(4,0) 2. (a) Calcule o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{\sin n}{n}\right)\left(1 + n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \left(1 - \frac{1}{n!}\right)^{(n-1)!}$.

(b) Determine a função real de variável real f que verifica $f(2) = -2\ln 2$ e $f'(x) = \dfrac{x^3+2}{x^3-x^2}$

(4,5) 3. Dado $a, k \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k.\arctan(x^2)}{x} & \text{se } x < 0 \\ a & \text{se } x = 0 \\ x^{-1}\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(t+1)}{t+1}dt & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine, se possível, os valores de a e de k para os quais $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Existe algum valor de a e de k para o qual f seja diferenciável em $x = 0$? Justifique.

(c) Sendo $g(x) = xf(x)$, escreva a equação da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $x = 1$.

(d) Indique, justificando, o valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{(n^2-1)(n^2+1)}{-n^4+2n+1}\right)$;

(2,0) 4. Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e considere a função $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

(a) Prove que g é diferenciável no ponto 0 e calcule o valor de $g'(0)$.

(b) Mostre, com um exemplo, que se em vez de termos $f \in C^2(\mathbb{R})$ tivessemos apenas f diferenciável em $\mathbb{R}$, g poderia não ser diferenciável em 0.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1-\cos(x))^3\cos^2(x)}{(x+1)\sqrt{x^{\alpha+2}+x^\alpha}}dx$$

(2,5) 6. Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabendo que a equação $e^{x^2}f(x) = 1$ tem três soluções, uma positiva, uma negativa e uma nula, prove que a função f' tem, pelo menos, um zero.