Cap. 8- Modelos dos mercados financeiros - parte 1

ISEG

O modelo de Black-Scholes

- Modelo de Black-Scholes: 2 activos com dinâmica:

$$dB(t) = rB(t)\,dt, \tag{1}$$
$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t d\overline{W}_t, \tag{2}$$

onde r, α e σ são constantes.

- $B(t)$ é o preço de um activo sem risco (obrigação ou depósito bancário): é uma função determinista.
- S_t é o processo de preço de um activo com risco (acção ou índice): é um processo estocástico.
- $\overline{W}_t$: Movimento Browniano relativamente à medida de probabilidade original P.

O modelo de Black-Scholes

- r: taxa de juro sem risco ("short rate of interest").
- α: taxa de rendibilidade média ("mean rate of return") do activo com risco.
- σ: Volatilidade do activo com risco.
- A solução de (2) é o movimento Browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \overline{W}_t\right).$$

Derivados financeiros

- Consideremos um direito contingente ("contingent claim- exemplo, um derivado financeiro) com payoff da forma:

$$\chi = \Phi\left(S\left(T\right)\right). \tag{3}$$

Assumimos que este derivado financeiro pode ser negociado no mercado e que o seu processo de preço é da forma:

$$\Pi\left(t\right) = F\left(t, S_t\right), \quad t \in \left[0, T\right], \tag{4}$$

onde F é uma função diferenciável de classe $C^{1,2}$.

Derivados financeiros

- Aplicando a fórmula de Itô a (4), considerando (2), obtemos:

$$dF(t,S_t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t}(t,S_t) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,S_t)\right) dt + \left(\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t,S_t)\right) d\overline{W}_t.$$

Derivados financeiros

Ou seja:

$$F(t,S_t) = F(0,S_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial t}(r,S_r) + AF(r,S_r)\right) dr + \int_0^t \left(\sigma S_r \frac{\partial F}{\partial x}(r,S_r)\right) d\overline{W}_r,$$

onde

$$Af(t,x) = \alpha x \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$$

é o operador infinitesimal associado à difusão S_t com EDE (2).

Derivados financeiros

- Também podemos escrever:

$$d\Pi(t) = \alpha_\Pi(t)\,\Pi_t dt + \sigma_\Pi(t)\,\Pi_t d\overline{W}_t, \tag{5}$$

onde

$$\alpha_\Pi(t) = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + \alpha S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t)\right)}{F(t, S_t)}, \tag{6}$$

$$\sigma_\Pi(t) = \frac{\sigma S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)}{F(t, S_t)}. \tag{7}$$

Portfolios

- Portfolio (a_t, b_t)
- a_t: n^o de acções ("n^o of shares of stock") no portfolio no instante t.
- b_t: n^o de obrigações (ou número de unidades do activo sem risco).
- Se a_t é negativo, então é porque temos posição curta em acções (acções vendidas "a descoberto")
- Se b_t é negativo, então é porque temos posição curta no activo sem risco (por exemplo, empréstimo contraído...)

Portfolios

- Valor do portfolio no instante t:

$$V(t) = a_t S_t + b_t B_t.$$

- Supõe-se que o portfolio é autofinanciado,.isto é, que:

$$dV_t = a_t dS_t + b_t dB_t.$$

- Um portfolio auto-financiado é um portfolio no qual a variação do seu valor é causada apenas pela variação do preço dos activos.

Avaliação pelo princípio de arbitragem

- Consideremos um portfolio com dois activos: o activo com risco subjacente e o activo derivado. Sejam $u_S(t)$ e $u_\Pi(t)$ as quantidades relativas de cada activo no portfolio $(u_S(t) + u_\Pi(t) = 1)$. A dinâmica do valor do portfolio (autofinanciado) é dada por:

$$dV_t = u_S(t)\, V_t \frac{dS_t}{S_t} + u_\Pi(t)\, V_t \frac{d\Pi_t}{\Pi_t}.$$

Substituindo (2) e (5), obtemos

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t \left[u_S(t)\,\alpha + u_\Pi(t)\,\alpha_\Pi(t)\right] dt \\ &\quad + V\left[u_S(t)\,\sigma + u_\Pi(t)\,\sigma_\Pi(t)\right] d\overline{W}_t. \end{aligned}$$

Avaliação pelo princípio de arbitragem

- Vamos definir o portfolio $(u_S(t), u_\Pi(t))$ de forma a que a parte estocástica de dV_t seja nula.
- Sejam $u_S(t), u_\Pi(t)$ soluções do sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} u_S(t) + u_\Pi(t) = 1, \\ u_S(t)\sigma + u_\Pi(t)\sigma_\Pi(t) = 0. \end{cases}$$

- Este sistema tem a solução:

$$u_S(t) = \frac{\sigma_\Pi(t)}{\sigma_\Pi(t) - \sigma},$$
$$u_\Pi(t) = \frac{-\sigma}{\sigma_\Pi(t) - \sigma}.$$

Avaliação pelo princípio de arbitragem

- Substituindo (7) nas expressões, obtemos:

$$u_S(t) = \frac{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t)}{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) - F(t, S_t)}, \tag{8}$$
$$u_\Pi(t) = \frac{-F(t, S_t)}{S_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) - F(t, S_t)}. \tag{9}$$

- Com este portfolio, temos (valor do portfolio sem diferencial estocástico):

$$dV_t = V_t \left[u_S(t)\alpha + u_\Pi(t)\alpha_\Pi(t) \right] dt.$$

- Princípio de ausência de arbitragem $\Longrightarrow$

$$u_S(t)\alpha + u_\Pi(t)\alpha_\Pi(t) = r \tag{10}$$

Avaliação pelo princípio de arbitragem - Modelo de Black-Scholes

- Substituindo (6), (8) e (9) na condição de não arbitragem (10), obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, S_t) + rS_t \frac{\partial F}{\partial x}(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, S_t) - rF(t, S_t) = 0.$$

- Além disso, é claro que na maturidade ou data de vencimento do derivado, temos

$$\Pi(T) = F(T, S_T) = \Phi(S(T)) \qquad (11)$$

Avaliação pelo princípio de arbitragem - Modelo de Black-Scholes

- Podemos portanto enunciar o teorema:

Teorema

(Eq. de Black-Scholes): Assuma que o mercado é especificado pelas eqs. (1)-(2) e que queremos avaliar um derivado com payoff da forma (3). Então, a única função de preço da forma (4) que é consistente com o princípio de ausência de arbitragem é a solução F do seguinte problema de valores na fronteira, definido no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}^+$*:*

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) - rF(t, x) = 0, \qquad (12)$$

$$F(T, x) = \Phi(x).$$

Avaliação pelo princípio de arbitragem - Modelo de Black-Scholes

- Hipóteses consideradas anteriormente: Assumimos que o preço do derivado é da forma $\Pi(t) = F(t, S_t)$ e que existe um mercado para o derivado... para derivados negociados "over the counter"(OTC) não é normalmente o caso...
- Para resolver este problema, veremos mais adiante como deduzir a equação (12) sem considerar estas hipóteses...

Notas suplementares sobre arbitragem

- Uma oportunidade de arbitragem num mercado financeiro é um portfolio autofinanciado h tal que:

$$\begin{aligned} V^h(0) &= 0, \\ V^h(T) &> 0 \quad P\text{-a.s.} \end{aligned}$$

- Uma oportunidade de arbitragem é uma possibilidade de "fazer dinheiro"a partir do "nada"com probabilidade 1.
- Princípio de ausência de arbitragem: Dado um derivado com preço $\Pi(t)$, consideramos que $\Pi(t)$ é tal que não há oportunidades de arbitragem no mercado.

Proposição

Se um portfolio autofinanciado h é tal que o valor do portfolio tem dinâmica

$$dV^h(t) = k(t) V^h(t) dt,$$

onde $k(t)$ é um processo adaptado, então temos que ter $k(t) = r$ para todo o t, ou existirão oportunidades de arbitragem.