Mestrado em Matemática Financeira

Cálculo Estocástico

Exame - Época Normal

Duração: 2 horas

7 de Junho de 2013

1. Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \geq 0\}$.

(a) Verifique se o processo X definido por

$$X_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + t^2$$

é ou não uma martingala, justificando.

(b) Será que o processo Y definido por

$$Y_t = tB_{\frac{1}{t}}$$

é um movimento Browniano? Justifique convenientemente.

2. Seja $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Mostre que

$$\exp(B_T) = e^{\frac{T}{2}} + e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s$$

e calcule Var $\left[e^{\frac{T}{2}} \int_0^T e^{\left(B_s - \frac{s}{2}\right)} dB_s\right]$. (Sugestão: considere o processo $Y_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$).

3. Considere o movimento Browniano $B = \{B(t), t \in [0, T]\}$

(a) Resolva a E.D.E.

$$\begin{aligned} dX_t &= e^{-2t} X_t dt + t^2 X_t dB_t, \\ X_0 &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Sugestão: talvez seja conveniente usar um factor de integração adequado.

(b) Considere a E.D.E.

$$dX_t = \sqrt{X_t} dt + X_t dB_t, \qquad X(0) = 0.$$

Verifique se pode aplicar o teorema de existência e unicidade de soluções. Justifique.

Considerando também a E.D.E.

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{X_t} dB_t, \qquad X(0) = 0,$$

o que pode concluir sobre a existência e unicidade de solução neste caso? Justifique.

4. Considere o problema de valores na fronteira no domínio $[0, T] \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= 4F(t, x) - 50 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad t > 0, \ x \in \mathbb{R} \\ F(T, x) &= x^2. \end{aligned}$$

Especifique qual o operador infinitesimal da difusão associada, determine explicitamente este processo de difusão e determine a solução explícita do problema.

5. Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas, respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma \, S_t \, d\overline{W}_t \quad \text{ e } \quad dB_t = r \, B_t \, dt, \text{ com } B_0 = 1,$$

onde $\overline{W}$ é um movimento Browniano e $t \in [0, T]$.

(a) Considere uma carteira autofinanciada com composição $(h^0(t), h^*(t))$ (de activos sem risco e com risco, respectivamente) e seja V_t o valor dessa carteira no instante t. Supondo que esta carteira replica um derivado cujo preço é dado pela função de classe $F(t, S_t)$ (i.e., $F(t, S_t) = V_t$) deduza que:

$$h^*(t) = \frac{\partial F(t, S_t)}{\partial x}.$$

(Sugestão: aplique a Fórmula de Itô a $F(t, S_t)$ e determine depois o diferencial dV_t, tendo em conta que a carteira é autofinanciada).

(b) Determine o preço (no instante $t < T$) do direito contingente com payoff

$$\chi = \Phi(S_T) = \begin{cases} 2K & \text{se } \ln(S_t) > 2K \\ K & \text{se } K \leq \ln(S_t) \leq 2K \\ 0 & \text{se } \ln(S_t) < K \end{cases}$$

6. Seja $B = \{B_t, t \geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere $\varepsilon > 0$ e a função

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \varepsilon \\ \frac{1}{2}\left(\varepsilon + \frac{x^2}{\varepsilon}\right) & \text{se } |x| < \varepsilon \end{cases}.$$

Aplicando a fórmula de Itô a $g_\varepsilon(B_t)$ (apesar de não ter 2^a derivada em $x = \pm\varepsilon$), mostre que

$$g_\varepsilon(B_t) = \frac{\varepsilon}{2} + \int_0^t g'_\varepsilon(B_s) \, dB_s + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{]-\varepsilon, \varepsilon[}(B_s) \, ds,$$

e mostre ainda que quando $\varepsilon \to 0$ (limite em média quadrática), obtemos que

$$\int_0^t g'_\varepsilon(B_s) \, dB_s \to \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s.$$

Cotações: 1(a):2.25, (b):2.25, 2:2.25, 3(a):2, (b):2.25, 4:2.25, 5(a):2.25, (b):2.5, 6:2