Mestrado em Matemática Financeira

Cálculo Estocástico

Exame - Época de Recurso
Duração: 2 horas
1 de Julho de 2013

1. Considere o movimento Browniano $B = \{B_t, t \geq 0\}$ e o processo

$$X_t = \int_0^t e^{-s} dB_s + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{4}.$$

Verifique se o processo Z definido por

$$Z_t = e^{X_t}$$

é ou não uma martingala, justificando.

2. Seja $B = \{B_t, t \in [0, T]\}$ um movimento Browniano. Considere o processo $X_t = Ke^{a(t-1)+cB_t}$, onde a, c e K são constantes. Determine a equação diferencial estocástica e a condição inicial (X_0) satisfeita pelo processo X, identificando o coeficiente de deriva (ou "drift") e o coeficiente de difusão dessa E.D.E.

3. Considere o movimento Browniano $B = \{B(t), t \in [0, T]\}$ e a equação diferencial estocástica (de 2^a ordem) correspondente a um pêndulo com pequenas perturbações estocásticas:

$$Y_t'' + \left(1 + \varepsilon \frac{dB_t}{dt}\right) Y_t = 0,$$
$$Y_0 = c_1,\ Y_0' = c_2,$$

onde $\varepsilon > 0$, c_1 e c_2 são constantes e $\frac{dB_t}{dt}$ deve ser interpretado como a derivada em sentido generalizado do mov. Browniano (ou como o processo de "ruído branco").

(a) Introduzindo os processos $X_1(t) := Y_t$ e $X_2(t) := Y_t'$ e o vector $X(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}$, mostre que a Equação de 2^a ordem para Y pode ser transformada numa equação de 1^a ordem para o vector X (ou num sistema de 2 eqs. diferenciais estocásticas) da forma:

$$dX(t) = AX(t)\,dt - \varepsilon DX(t)dB_t$$

e determine de forma explícita as matrizes A e D.

(b) Mostre que $X_2(t) = X_2(0) - \int_0^t X_1(s)\,ds - \varepsilon \int_0^t X_1(s)\,dB_s$ e a partir daqui mostre também que

$$Y_t = X_1(t) = X_1(0) + \int_0^t X_2(s)ds =$$
$$= c_1 + c_2 t + \int_0^t (r - t)\,Y_r dr - \varepsilon \int_0^t \left(\int_0^s Y_r dB_r\right) ds.$$

4. Considere o problema de valores na fronteira no domínio $[0,T]\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+4x\frac{\partial F}{\partial x}+8\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+(\ln x)^2=0,\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$F(T,x)=\ln\left(x^{10}\right).$$

(a) Mostre que a solução do problema pode representar-se por:

$$F(t,x)=\mathbb{E}_{t,x}\left[\ln\left(X_T^{10}\right)\right]+\int_t^T \mathbb{E}_{t,x}\left[(\ln(X_s))^2\right]ds,$$

onde X é um processo de difusão que satisfaz

$$dX_s=4X_s ds+4X_s dB_s,\quad \text{se } s>t,$$
$$X_t=x.$$

(b) Determine explicitamente o processo X e a solução $F(t,x)$ correspondente.

5. Considere o modelo de Black-Scholes constituído por um activo com risco S_t e um activo sem risco (por exemplo, conta bancária) B_t. Os activos S_t e B_t têm dinâmicas dadas (sob a medida P), respectivamente, pelas EDE's

$$dS_t=\mu S_t\,dt+\sigma\,S_t\,d\overline{W}_t\quad \text{e}\quad dB_t=r\,B_t\,dt,\ \text{com } B_0=1,$$

onde $\overline{W}$ é um movimento Browniano e $t\in[0,T]$.

(a) Mostre que sob a medida equivalente de martingala (medida Q) o preço descontado do activo com risco $\widetilde{S}_t=\frac{S_t}{B_t}$ é uma martingala.

(b) Determine o preço (no instante $t<T$) do direito contingente com payoff

$$\chi=\Phi(S_T)=\begin{cases} S_t^4 & \text{se } S_T\geq S_t^2,\\ S_T^4 & \text{se } S_T<S_t^2.\end{cases}$$

6. Seja $B=\{B_t,t\geq 0\}$ um movimento Browniano. Considere um processo adaptado com trajectórias contínuas u_t que satisfaz

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |u_t|^2\,dt\right]<\infty.$$

Considere também a sucessão de processos simples $u_t^{(n)}$ definidos por

$$u_t^{(n)}=\begin{cases} n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} u_s ds & \text{se } \frac{k}{n}\leq t<\frac{k+1}{n},\ \text{e com } k=1,2,...,n^2-1,\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}$$

Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left|u_t-u_t^{(n)}\right|^2 dt=0.$$

Cotações: 1:2.25, 2:2.25, 3(a):2.25, (b):2.25, 4(a):2.25, (b):2.25, 5(a):2.25, (b):2.25, 6:2