

Modelação e previsão da Esperança Média de Vida a 65 anos.

BRUNO NASCIMENTO*

Lisboa School of Economics & Management

bmsnascimento@gmail.com

Resumo

Este trabalho, motivado pela importância atual da previsão da Esperança Média de Vida aos 65 anos (EMV), procura dentro da previsão univariada encontrar modelos de previsão competentes. Ao longo deste trabalho foram usados modelos de alisamento exponencial e modelos ARIMA. Ao todo foram concebidos e testados sete modelos. Foi também testada a hipótese de que duas possíveis combinações de previsões apresentassem resultados superiores aos modelos num carácter individual.

Os resultados apontam para uma boa precisão dos modelos de Holt a 1 e 3 passos e de um modelo médias móveis integrado de ordem 1. Já as combinações das previsões não aparentam, neste caso, melhorar a precisão das previsões.

Palavras-chave: Esperança média de vida, previsão, pensões, modelo de Holt, ARIMA e combinação de previsões.

I. INTRODUÇÃO.

No presente trabalho pretende-se modelar e prever a Esperança Média de Vida (EMV) aos 65 anos, para Portugal, cujo o calculo é efetuado pelo INE (Instituto Nacional de Estatística) e pelo POR-DATA.

A EMV aos 65 anos é definida pelo INE (no Sistema Integrado de Metainformação¹) como o número médio de anos que uma pessoa, que atinja a idade exata de 65 anos, pode esperar ainda viver, mantendo-se as taxas de mortalidade por idades observadas no momento. Esta variável pode ser vista como indicadora das condições de vidas das pessoas que pertencem a uma faixa etária mais elevada, isto porque é expectável assumir que quanto melhores as condições de vida da população maior será a sua longevidade. Por outro lado, esta variável também reflete como se irá desenvolver no futuro a estrutura etária na população, i.e. se a EMV aos 65 anos vem evoluindo positivamente (como é o caso de Portugal, ver o primeiro gráfico da figura 3) é expectável, que a população se torne mais envelhecida com o passar do tempo.

Partindo da segunda leitura possível da variável em causa, o XVII Governo Constitucional da República Portuguesa no [Decreto-Lei n.º 187/2007 de 10 de Maio], intro-

duziu no calculo das pensões um fator de sustentabilidade, que leva em linha de conta a evolução da EMV aos 65 anos. No mesmo sentido o XIX Governo Constitucional da República Portuguesa no [Decreto-Lei n.º 167-E/2013 de 31 de dezembro], alterou o ano de referencia da EMV aos 65 anos, do ano de 2006 para o ano 2000 sendo assim o fator de sustentabilidade para o ano i (ano do inicio da pensão),

$$\text{Fator de sustentabilidade}_i = \frac{EMV_{2000}}{EMV_{i-1}} \quad (1)$$

e introduziu uma nova forma para a determinação da idade normal de acesso à pensão de velhice (a aplicar às pensões a iniciar em 2016²), onde a EMV aos 65 anos desempenha um papel importante. A EMV aos 65 anos é usada para calcular o acréscimo de meses face à idade normal de acesso à pensão de velhice em 2014 (que é de 66 anos)

$$m_n = \sum_{i=2015}^n (EMV_{i-2} - EMV_{i-3}) \times 12 \times \frac{2}{3} \quad (2)$$

onde m_n representa o número de meses a crescer aos 66 anos para a definição da idade normal de acesso à pensão de velhice; n ano de inicio da pensão. Dadas estas alterações ao sistema de pensões torna-se importante para a sociedade o conhecimento dos valores futuros da variável EMV aos

*Com o seguinte número de processo 40778.

¹Para mais detalhes: <http://smi.ine.pt/Conceito/Detalhes/3323>

²A [Portaria n.º 378-G/2013 de 31 de dezembro] define que a idade normal de acesso à pensão de velhice em 2014 e 2015 seja de 66 anos.

65 anos, por um lado, por uma questão orçamental da parte do Estado, visto o montante pago de novas pensões variar com a EMV, por outro lado, por parte da sociedade o conhecimento da idade a partir da qual se pode reformar sem que haja algum corte da pensão.

Os dados usados neste trabalho proveem da base de dado PORDATA, são de carácter anual e os dados representam o período de 1970 a 2012. Esta amostra será dividida em três:

- De 1970 a 2006: para a modelação da série;
- De 2007 a 2009: para testar as capacidades de cada modelo no campo da previsão;
- De 2010 a 2012: para comparar a qualidade dos modelos testados no grupo anterior com combinações dos modelos.

No ponto número dois do trabalho, será feita uma caracterização da série onde procurar-se-á decompor a série nas suas principais componentes, estacionarizar a serie (caso esta não o seja) e detetar os seus *outliers*.

No ponto número três, será exposta toda a metodologia, a aplicar no trabalho, entre os quais, o modelo de alisamento exponencial escolhido, os modelos ARIMA e a forma de combinar as previsões.

Num quarto ponto, serão apresentados só resultados da aplicação da metodologia expressa no ponto anterior. Dar-se-á ênfase à qualidade de previsão de cada modelo.

No quinto e ultimo ponto, serão enunciadas as principais conclusões do trabalho.

II. CARACTERIZAÇÃO DA SÉRIE.

Neste ponto do trabalho pretende-se conhecer melhor as características da série, para que seja possível uma boa escolha dos modelos a aplicar na próxima secção.

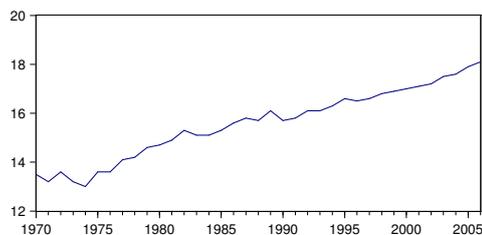


Figura 1: Cronograma da EMV aos 65 anos em Portugal.

Na figura 1 temos o cronograma da série, que descreve o comportamento desta no período de 1970 a 2006³. Visualmente é perceptível que a série apresenta uma tendência crescente e dado os dados serem anuais não existe nenhum padrão sazonal. Através da aplicação TRAMO⁴, desenvolvida por [Gómez e Maravall (1994)], foi detetado a existência de um *outlier* na observação respeitante ao ano de 1974. Neste caso estamos perante um *additive outlier*, assim sendo a série pode ser representada da seguinte forma,

$$Y_t = Z_t + \omega I_t^{(1974)} \quad (3)$$

onde Z_t representa a série sem o efeito do *outlier* e

$$I_t^{(1974)} = \begin{cases} 0, & t \neq 1974 \\ 1, & t = 1974 \end{cases} \quad (4)$$

Isto quer dizer que, quando se for aplicar os modelos para previsão terá de se ter em conta esta informação.

Para uma análise mais concreta das componente da série, aplicou-se a técnica de decomposição clássica, considerando que as componentes relacionam-se de forma multiplicativa. Os resultados desta decomposição estão evidenciados na figura 2. Os principais aspetos a realçar desta decomposição são: primeiro a tendência da série é crescente; segundo através da regressão da série sob o termo tendência, verifica-se que a série apresenta em média um crescimento anual de 0,13 anos; terceiro parece existir ao longo do tempo uma diminuição da amplitude dos movimentos cíclicos; quarto a partir de 1996 existe uma diminuição da parte da série que não é explicada pela tendência nem pelo ciclo, isto é, os movimentos irregulares após 1996 tendem a aproximar-se de 1, o que juntamente com a diminuição da amplitude dos movimentos cíclicos pode ser uma explicação para a diferença das oscilações da série antes de 1996 e pós 1996.

³Período definido para a modelização. O resto da amostra, como referido na introdução, será usado para avaliar a qualidade das previsões.

⁴Disponível no programa Eviews.

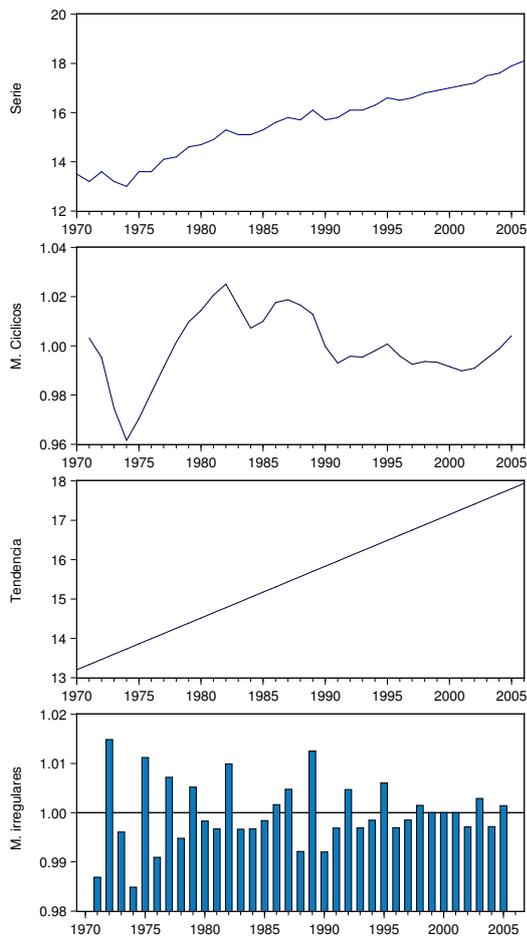


Figura 2: Decomposição da série através do método multiplicativo.

Como se pode ver pelo primeiro gráfico da figura 3, até 1996 a série apresenta uma variância diferente da verificada após essa data. Este facto indica que a série não é estacionária em variância. No mesmo gráfico verifica-se, e como referido anteriormente, que a série apresenta uma tendência, o que implica que esta não seja estacionária em média. Isto quer dizer que a série não cumpre os requisitos para ser estacionária de segunda ordem ou em covariância. Para corroborar esta análise efetuou-se um teste de raiz unitária de *Dickey-Fuller*⁵, com a dimensão do teste (α) a 5%, onde se obteve o valor-p de 0.0920, o que é favorável à hipótese nula (não estacionaridade).

Dadas as conclusões retiradas no paragrafo anterior, foi necessário transformar a variável. As transformações efetuadas foram: a aplicação do logaritmo natural e de seguida uma diferenciação simples. Obteve-se a série caracterizada, pelo seu cronograma, função de autocorrelação (FAC) e função autocorrelação parcial (FACP), na figura 4.

⁵Especificações do teste: Considerou-se um termo tendência e para a seleção dos desfasamentos aplicou-se o critério de Schwarz com 9 desfasamentos máximos.

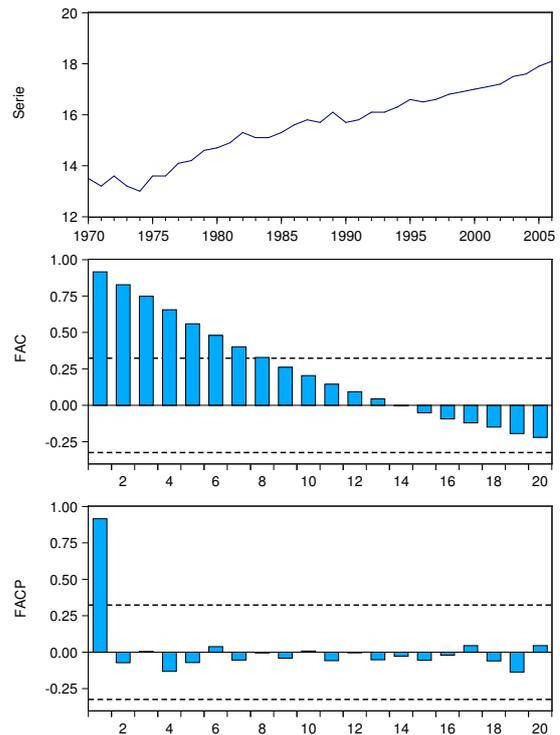


Figura 3: Cronograma, FAC e FACP da variável inicial.

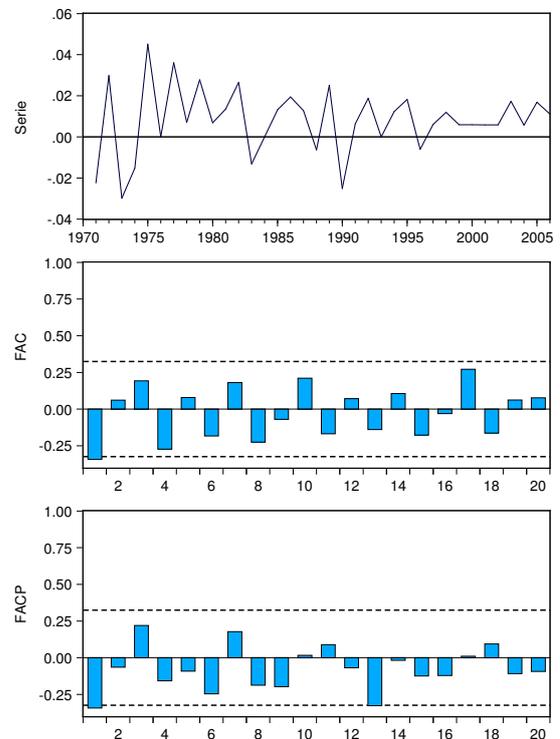


Figura 4: Cronograma, FAC e FACP da variável transformada.

Quer pelo que é evidenciado no primeiro gráfico da figura 4, quer pelo valor-p (0,0000) do teste

de raiz unitária efetuado à série transformada, há evidências para se rejeitar o cenário de não estacionaridade, ou seja, não há indícios de que a série transformada não seja estacionária em covariância.

III. MODELIZAÇÃO.

Neste ponto irá ser descrita a metodologia usada para efetuar as previsões, que serão analisadas no próximo ponto, e a forma de analisar a qualidade da previsão. Em termos gerais, o indicador de avaliação da previsão a ser utilizado será o Erro Absoluto Médio (EAM) e a metodologia aplicada divide-se em: alisamento exponencial, modelo ARIMA e combinação de previsões.

I. Avaliação dos erros de previsão.

Seja Y_t uma série temporal, onde t representa o período em que ocorre a observação e \hat{Y}_{t+m} a previsão da série temporal (Y_t) para o período $t + m$ a m passos (i.e. a m períodos de distancia da realização da série). A medida escolhida para a análise da qualidade de previsão, isto é, a estatística escolhida para medir o erro de previsão é o Erro Absoluto Médio (EAM). A estatística é obtida da seguinte forma

$$\text{EAM} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n | \hat{Y}_i - Y_i | \quad (5)$$

onde n é o número de previsões efetuadas. A principal justificação para a utilização do EAM em vez do Erro Quadrático Médio (medida mais usual) consiste, no facto de a magnitude das variações anuais da série ser inferior, em valor absoluto, a 1. Sendo a variação decimal, a aplicação do quadrado ao erro de previsão fará com que este diminua a sua escala, ou seja, que este seja bastante menor do que realmente é. Levando assim que a qualidade de ajustamento do modelo seja sobrevalorizada. Uma segunda justificação deve-se ao facto da interpretação do valor assumido pelo EAM ser mais simples, visto a unidade do EAM ser a mesma da variável. E não o quadrado desta, como acontece no EQM.

II. Alisamento Exponencial.

Existe uma gama variada de métodos de alisamento exponencial, cada um indicado para series temporais distintas [ver [Gardner (1985)] ou a versão mais recente [Gardner (2006)]].

Dadas as características da série, como a existência de tendência e ausência de sazonalidade, o modelo de alisamento exponencial escolhido é o modelo de Holt com tendência aditiva amortecida [Gardner e Mckenzie (1985)]. Este modelo é composto do duas equações de atualização uma para o nível ($a(t)$) e outra para a tendência ($b(t)$) da série e a equação de previsão.

$$a(t) = \alpha y_t + (1 - \alpha)(a(t-1) + \phi b(t-1)) \quad (6)$$

$$b(t) = \beta(a(t) - a(t-1)) + (1 - \beta)\phi b(t-1) \quad (7)$$

$$\hat{Y}_{t+m} = a(t) + b(t) \sum_{i=1}^m \phi^i. \quad (8)$$

com α, β e $\phi \in [0, 1]$. Se o $\phi = 1$ temos o modelo de Holt linear com tendência aditiva. Para a aplicação deste modelo é necessário efetuar a inicialização das equações, isto é, definir o valor para $a(1)$ e $b(1)$. Para tal vou usar o método das médias para estimar o declive (b_1) da série através da expressão:

$$b(1) = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{k} \quad (9)$$

Onde \bar{Y}_1 é a media das primeiras k observações e \bar{Y}_2 é a media das segundas k observações da série. Para obter o nível da série utiliza-se

$$a(1) = \bar{Y}_1 - b(1) \times \frac{k+1}{2} \quad (10)$$

Este modelo vai ser aplicado a 1 passo, 2 passos, 3 passos, 4 passos e 5 passos, isto quer dizer que se vai construir um modelo para prever o valor da série no período seguinte, outro modelo para prever o valor da série dois momentos à frente da altura em que é feita a previsão, etc. Para a escolha dos parâmetros das equações de atualização, para cada um dos 5 modelos, α, β e ϕ vou usar a escolha ótima através da aplicação Solver do programa Excel. Esta escolha ótima vai ter como objetivo, a escolha da combinação de parâmetros que minimiza o EAM, para parte do período de modelação. Mais concretamente irá usar-se o período de 1982 a 2006 para encontrar o parâmetros ótimos.

III. Modelo ARIMA.

Um outro modelo usado para a previsão da série é o modelo ARIMA (ver [Box et al. (1994)]). O modelo ARIMA⁶ na sua construção geral é representado por um polinómio auto-regressivo ($\phi(B)$) e um de médias móveis ($\theta(B)$), ou seja,

$$\phi(B)(1 - B)^d(Y_t - \mu) = \theta(B)\xi_t \quad (11)$$

⁶Dado a série não apresentar sazonalidade considera-se como modelo geral a versão sem os polinómios sazonais.

onde B é o operador atraso, $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p)$, μ representa a média da série e $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q)$. Uma forma simples de representar este modelo é ARIMA(p, d, q), onde p é a ordem do polinómio auto-regressivo, d é o número de diferenciações simples aplicadas à série e q é a ordem do polinómio de médias móveis. A definição dos valores inteiros de p , q e d é feita através da análise das FAC e FACP da série. Após esta definição o modelo será estimado e avaliado.

A avaliação da qualidade do modelo é feita a dois tempos. Primeiro são efetuados testes ao modelo com o objetivo de avaliar a qualidade das estimativas. Estes testes são: testes de significância ao parâmetros do modelo, o teste de significância a cada *lag* da FAC e FACP dos resíduos do modelo e o teste Ljung-Box [Ljung e Box (1978)] (testa da nulidade conjunta dos *lags* da FAC e FACP dos resíduos do modelo). Em segundo lugar, caso passem nos testes anteriores serão comparados ao nível do critério de seleção Schwartz (ver [Schwarz (1978)]).

IV. Combinação de previsões.

Quando não se consegue atingir o modelo ideal para a previsão de uma série, pode ser útil a combinação de previsões de diferentes modelos com vista a uma melhor previsão. Segundo [Makridakis e Winkler (1983)] a combinação de previsões pode produzir menos erros que a utilização de um modelo isoladamente. Nesse mesmo artigo, os autores para combinar as previsões utilizam uma média simples destas, ou seja,

$$\hat{Y}_{t+m}^c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{Y}_{t+m}^i \quad (12)$$

onde \hat{Y}_{t+m}^c representa a previsão resultante da combinação dos modelos para o instante $t + m$ e \hat{Y}_{t+m}^i é a previsão do modelo i para o instante $t + m$. No mesmo ano, os mesmos autores (ver [Winkler e Makridakis (1983)]) testam a eficácia de fazer uma média ponderada das previsões dos modelos em vez de uma média simples. Um dos casos testados usaram o Erro Quadrático Médio (EQM) para ponderar inversamente as previsões, ou seja, somaram o EQM de todos os modelos e na média atribuíram a cada um dos modelos o peso inversamente proporcional à contribuição para o total do EQM. Neste trabalho procurar-se-á efetuar a mesma experiência só que usando o EAM. Assim

sendo temos,

$$\hat{Y}_{t+m}^c = \frac{1}{(k-1)M} \sum_{i=1}^k (M - EAM^i) \hat{Y}_{t+m}^i \quad (13)$$

onde $M = \sum_{i=1}^k EAM^i$, ou seja, M é a soma do EAM de todos os modelos e EAM^i é o Erro Absoluto Médio do modelo i .

IV. RESULTADOS.

Esta secção está dividida em três partes: a primeira onde se irá apresentar os modelos estimados, a segunda onde se apresenta os resultados da previsão dos modelos para o primeiro período de teste e uma terceira parte onde se aplicará a combinação de previsões e onde se analisa os resultados das previsões efetuadas para o segundo período de teste.

I. Resultados da modelização.

Através da otimização, os coeficientes modelo linear de Holt com tendência amortecida estão descritos na tabela 1.

Modelo	Coeficientes		
	α	β	ϕ
H1 passo	0,393	0,119	1
H2 passos	0,524	0,152	1
H3 passos	0,470	0,134	1
H4 passos	0,573	0,142	1
H5 passos	0,755	0,143	1

Tabela 1: Coeficientes ótimos do modelo linear de Holt com tendência amortecida.

Os cinco modelos apresentam resultados muito semelhantes (ao nível dos coeficientes), com particular interesse no facto de a série não apresentar tendência amortecida. Outro facto, importante de salientar, é o baixo valor de β , o que significa que a componente tendência do período t é bastante próximo do valor do período $t - 1$.

Dados os gráficos da FAC e FACP da figura 4, decidi estimar os seguintes modelos, tendo já em conta o *outlier*,

$$(1 - \phi B)(1 - B)(Y_t - c) = \xi_t + \omega(1 - B)I_t^{(1974)} \quad (14)$$

$$(1 - B)(Y_t - c) = (1 - \theta B)\xi_t + \omega(1 - B)I_t^{(1974)} \quad (15)$$

Modelo 1- ARIMA(1, 1, 0)				
Parâmetro	Coefficiente	Valor-p	Resultados gerais do modelo	
c	0.0087	0.0000	Teste Ljung-Box aos primeiros 16 lags (valor-p)	0.8348
ϕ	-0.4587	0.0070	Teste Normalidade dos resíduos de Jarque-Bera (valor-p)	0.5659
ω	-0.0393	0.0016	Critério de informação de Schwarz	-5.6827

Modelo 2- ARIMA(0, 1, 1)				
Parâmetro	Coefficiente	Valor-p	Resultados gerais do modelo	
c	0.0085	0.0000	Teste Ljung-Box aos primeiros 16 lags (valor-p)	0.4573
θ	0.4750	0.0032	Teste Normalidade dos resíduos de Jarque-Bera (valor-p)	0.5942
ω	-0.0395	0.0023	Critério de informação de Schwarz	-5.5427

Tabela 2: Resultados da aplicação do modelo ARIMA.

Como se pode verificar pela tabela 2 ambos os modelos passam nos testes efetuados, incluindo a significância individual dos lags da FAC e FACP (ver Anexo). É de realçar que ambos os modelos apresentam valores-p elevados nos testes estatísticos, o que quer dizer que as estatísticas teste observadas são bastante favoráveis às hipóteses nulas dos testes.

II. Previsão para o primeiro período de teste.

Com base nas sete modelizações da série (5 alisamentos exponenciais e 2 modelos ARIMA), foi efetuada a previsão da série. Para cada uma das modelizações foi calculados o EAM, que se apresenta na tabela 3.

Modelo	Erro Absoluto Médio
H1 passo	0,078
H2 passos	0,079
H3 passos	0,163
H4 passos	0,228
H5 passos	0,331
ARIMA(1, 1, 0)	0,079
ARIMA(0, 1, 1)	0,058

Tabela 3: Resultados da previsão para o primeiro período de teste.

Os modelos de previsão a um passo, como seria expectável, apresentam melhores resultados que os modelos onde a previsão é efetuada a uma distância maior. Um aspeto a salientar é a proximidade, em termos de qualidade, do alisamento de Holt linear e do modelo ARIMA(0, 1, 1).

Os resultados evidenciados na tabela 2 e da tabela 3 remetem-nos para a ideia de que às vezes o modelo que melhor se ajusta estatisticamente aos dados, nem sempre é o melhor modelo para prever

a série. Isto verifica-se, pelo facto de o modelo ARIMA(1, 1, 0) apresentar melhores resultados nos testes estatísticos e no critério de informação do que o modelo ARIMA(0, 1, 1), mas quanto ao EAM verifica-se o contrario.

No gráfico 5 estão representadas as previsões dos 7 modelos (5 de alisamento exponencial e 2 ARIMA) e os valores observados. Da análise ao gráfico pode-se afirmar que os valores de 2007 e 2008 foram previstos com grande proximidade e no sentido contrário o valor para 2009 foi previsto com pouca fiabilidade.

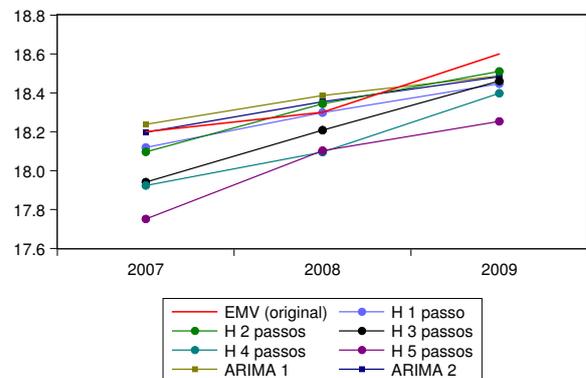


Figura 5: Previsão individual para o período de 2007 a 2009.

III. Previsão para o segundo período de teste.

Para o período de 2010 a 2012, foi efetuada a combinação das previsões, com vista a testar se esta traria ou não melhores resultados que a previsão individual para o mesmo período. Como exposto anteriormente (ver [Combinação de previsões](#)), as formas de combinação das previsões são dadas por:

- combinação 1

$$\hat{Y}_{t+m}^c = \frac{1}{7}(\hat{Y}_{t+m}^{H1} + \hat{Y}_{t+m}^{H2} + \hat{Y}_{t+m}^{H3} + \hat{Y}_{t+m}^{H4} + \hat{Y}_{t+m}^{H5} + \hat{Y}_{t+m}^{ARIMA1} + \hat{Y}_{t+m}^{ARIMA2}) \quad (16)$$

- combinação 2

$$\hat{Y}_{t+m}^c = \frac{1}{(k-1)M} \left[(M - EAM^{H1})\hat{Y}_{t+m}^{H1} + (M - EAM^{H2})\hat{Y}_{t+m}^{H2} + (M - EAM^{H3})\hat{Y}_{t+m}^{H3} + (M - EAM^{H4})\hat{Y}_{t+m}^{H4} + (M - EAM^{H5})\hat{Y}_{t+m}^{H5} + (M - EAM^{ARIMA1})\hat{Y}_{t+m}^{ARIMA1} + (M - EAM^{ARIMA2})\hat{Y}_{t+m}^{ARIMA2} \right] \quad (17)$$

onde $M = \sum_{i=1}^k EAM^i$, ou seja, M é a soma do EAM de todos os modelos.

Modelo	Ponderadores Baseado no EAM
H1 passo	15,380%
H2 passos	15,372%
H3 passos	13,990%
H4 passos	12,930%
H5 passos	11,244%
ARIMA(1,1,0)	15,371%
ARIMA(0,1,1)	15,713%

Tabela 4: Ponderadores para a combinação 2.

Na tabela 4 estão evidenciados os ponderadores para as combinação 2. Um aspeto de relevo é o de os ponderadores da combinação 2 serem razoavelmente semelhantes entre si, o que indica que os resultados desta combinação serão próximos aos da combinação 1.

Modelo	Erro Absoluto Médio
H1 passo	0,073
H2 passos	0,112
H3 passos	0,067
H4 passos	0,076
H5 passos	0,094
ARIMA(1,1,0)	0,097
ARIMA(0,1,1)	0,076
Combinação 1	0,074
Combinação 2	0,075

Tabela 5: Resultados da previsão para o segundo período de teste.

Na tabela 5 estão os EAM da previsão para o período de 2010 a 2012. Salienta-se a boa capacidade de previsão dos modelos individuais ARIMA e o modelo linear de Holt com tendência amortecida a 1,3 e 4 passos. Em termos de combinação de previsões, a que apresenta os melhores resultados é a combinação 1, com resultados muito semelhantes à combinação 2, apresentando um EAM bastante próximo aos melhores modelos individuais. Escolhendo os dois melhores modelos temos em primeiro lugar o modelo de Holt linear com previsões a 3 passos e o modelo de Holt linear com previsões a 1 passo.

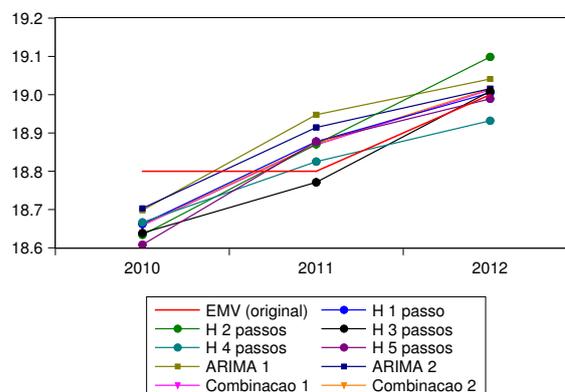


Figura 6: Previsão individual e combinada para o período de 2010 a 2012.

Quando se compara as previsões obtidas com os valores observados verifica-se que não há um modelo nem uma combinação interessante destes para que acerte no comportamento da série. Isto acontece porque todos os modelos apresentam mais ou mesmo o mesmos comportamento, isto é, como se pode ver pela figura 6 todas as previsões, de todos os modelos, seguem o mesmo padrão de erro (positivo ou negativo). E como as previsões feitas pelo modelo de Holt a 3 passos, demonstram pelo gráfico ser a que estão mais perto, no geral, do valor observado, a combinação de previsões destes modelos não poderá apresentar melhores resultados.

V. CONCLUSÃO.

Após este estudo sobre a modelação e previsão da Esperança Média de Vida, foi possível retirar algumas conclusões.

Em primeiro lugar, é de realçar a qualidade de modelação e previsão da série através da utilização de modelos de alisamento exponencial. Estes modelos, de aplicação mais simples que os modelos

ARIMA, obtiveram em qualquer um dos períodos da amostra usados para testes, resultados superiores aos modelos ARIMA.

Em segundo lugar, mesmo com uma aplicação de vários modelos, não foi possível encontrar um modelo que fosse, claramente, o melhor modelo para prever. É de notar que apesar de tudo, o top-3 dos melhores modelos, em termos de composição (e não de ordenação), foi semelhante. Se no primeiro período de teste era composto pelo modelo ARIMA(0, 1, 1), Holt linear a 1 passo e a 2 passos, já no segundo período de teste a diferença reside na troca do modelo de Holt linear 2 passo pelo modelo a 3 passos, excluindo as possíveis combinações de modelos.

Em terceiro lugar, os resultados da combinação de previsões seguiram a mesma linha dos melhores modelos de previsão. Isto quer dizer, a combinação de previsões não conseguiu obter melhores resultados, que os melhores modelos. Esta situação justifica-se pelo facto de grande parte dos modelos falharem a previsão todos no mesmo sentido, ou seja, na maioria dos casos verificados neste trabalho, a maioria das previsões falhavam no mesmo sentido, por excesso ou por defeito. Logo, a situação de compensação entre os modelos que previam por excesso com os que previam por defeito, não foi possível. Dado isto, seria difícil atingir um EAM de uma combinação inferior ao melhor modelo para o período em causa.

REFERÊNCIAS

- [Box et al. (1994)] Box, G., Jenkins, G., and Reinsel, G. 1994. Time series analysis: Forecasting and control, 3rd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [Decreto-Lei n.º 187/2007 de 10 de Maio]
Decreto-Lei n.º 187/2007 de 10 de Maio. *Diário da República*, 1.^a série—N.º 90—10 de Maio de 2007. Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social.
- [Decreto-Lei n.º 167-E/2013 de 31 de dezembro]
Decreto-Lei n.º 167-E/2013 de 31 de dezem-

bro. *Diário da República*, 1.^a série — N.º 253 — 31 de dezembro de 2013 Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social.

- [Gardner (1985)] Gardner Jr., E 1985, 'Exponential Smoothing: The State of the Art', *Journal Of Forecasting*, 4, 1, pp. 1-28.
- [Gardner (2006)] Gardner Jr., E 2006, 'Exponential smoothing: The state of the art—Part II', *International Journal Of Forecasting*, 22, pp. 637-666.
- [Gardner e McKenzie (1985)] Gardner Jr., E, & McKenzie, E 1985, 'FORECASTING TRENDS IN TIME SERIES', *Management Science*, 31, 10, pp. 1237-1246.
- [Gómez e Maravall (1994)] Gómez, V, & Maravall, A 1994, 'Estimation, prediction, and interpolation for nonstationary series with the Kalman filter', *Journal Of The American Statistical Association*, 89, 426, p. 611.
- [Ljung e Box (1978)] Ljung, G, & Box, G 1978, 'On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models', *Biometrika*, 2, p. 297.
- [Makridakis e Winkler (1983)] Makridakis, S, & Winkler, R 1983, 'AVERAGES OF FORECASTS: SOME EMPIRICAL RESULTS', *Management Science*, 29, 9, pp. 987-996.
- [Portaria n.º 378-G/2013 de 31 de dezembro]
Portaria n.º 378-G/2013 de 31 de dezembro. *Diário da República*, 1.^a série — N.º 253 — 31 de dezembro de 2013 Ministério do Trabalho e da Solidariedade Social.
- [Schwarz (1978)] Schwarz, G 1978, 'Estimating the Dimension of a Model', *The Annals of Statistics*, 2, p. 461.
- [Winkler e Makridakis (1983)] Winkler, R, & Makridakis, S 1983, 'The Combination of Forecasts', *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 2, p. 150.

VI. ANEXO.

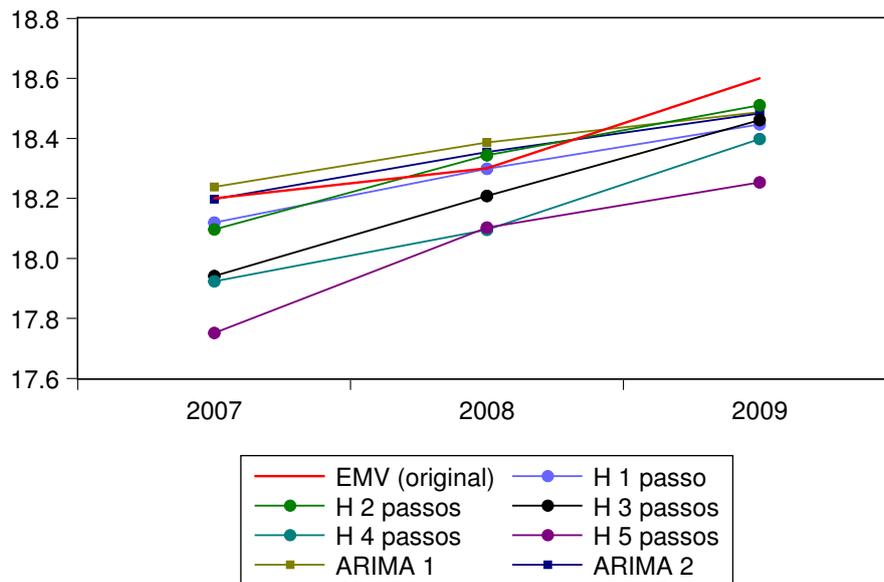


Figura 7: Previsão individual para o período de 2007 a 2009.

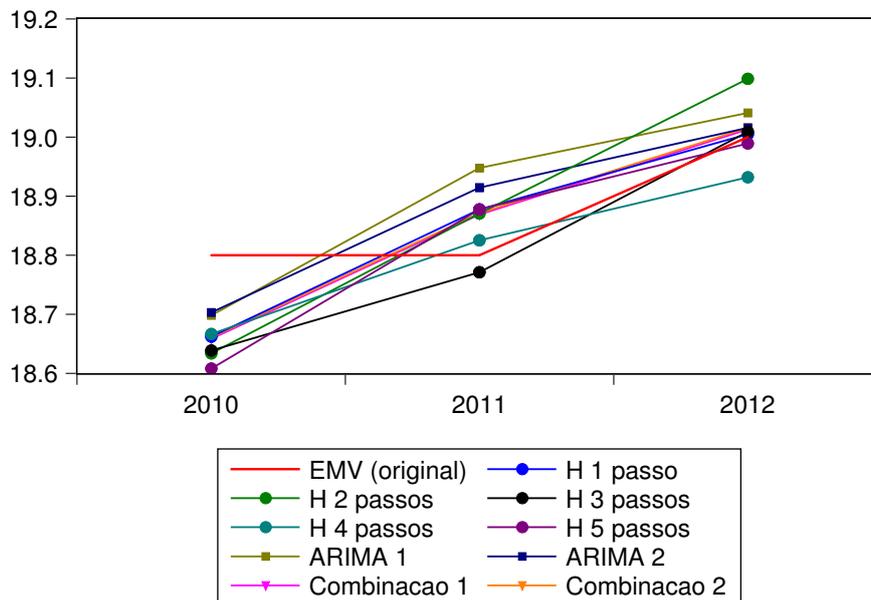


Figura 8: Previsão individual e combinada para o período de 2010 a 2012.

Dependent Variable: D(LOG(EMV))
 Method: Least Squares
 Date: 01/03/15 Time: 17:46
 Sample (adjusted): 1972 2006
 Included observations: 35 after adjustments
 Convergence achieved after 8 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.008718	0.001471	5.927367	0.0000
D(AO74)	-0.039303	0.011408	-3.445145	0.0016
AR(1)	-0.458743	0.159158	-2.882319	0.0070
R-squared	0.389597	Mean dependent var		0.009020
Adjusted R-squared	0.351447	S.D. dependent var		0.015743
S.E. of regression	0.012678	Akaike info criterion		-5.816053
Sum squared resid	0.005144	Schwarz criterion		-5.682737
Log likelihood	104.7809	Hannan-Quinn criter.		-5.770032
F-statistic	10.21221	Durbin-Watson stat		1.919337
Prob(F-statistic)	0.000371			
Inverted AR Roots	- .46			

Figura 9: Modelo ARIMA(1, 1, 0).

Dependent Variable: D(LOG(EMV))
 Method: Least Squares
 Date: 01/03/15 Time: 19:33
 Sample (adjusted): 1971 2006
 Included observations: 36 after adjustments
 Convergence achieved after 7 iterations
 MA Backcast: 1970

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.008516	0.001228	6.934785	0.0000
D(AO74)	-0.039492	0.011946	-3.305888	0.0023
MA(1)	-0.474984	0.149129	-3.185051	0.0032
R-squared	0.347989	Mean dependent var		0.008145
Adjusted R-squared	0.308473	S.D. dependent var		0.016380
S.E. of regression	0.013621	Akaike info criterion		-5.674701
Sum squared resid	0.006123	Schwarz criterion		-5.542741
Log likelihood	105.1446	Hannan-Quinn criter.		-5.628643
F-statistic	8.806333	Durbin-Watson stat		1.859142
Prob(F-statistic)	0.000861			
Inverted MA Roots	.47			

Figura 10: ARIMA(0, 1, 1).

Date: 01/03/15 Time: 19:48

Sample: 1970 2006

Included observations: 35

Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term and 1 dynamic regressor

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.032	0.032	0.0393	
		2	-0.054	-0.055	0.1529	0.696
		3	0.138	0.142	0.9236	0.630
		4	-0.263	-0.284	3.8233	0.281
		5	-0.061	-0.013	3.9850	0.408
		6	-0.079	-0.144	4.2613	0.512
		7	0.122	0.242	4.9550	0.550
		8	-0.012	-0.155	4.9616	0.665
		9	-0.142	-0.082	5.9619	0.651
		10	0.108	-0.015	6.5707	0.682
		11	-0.091	0.002	7.0174	0.724
		12	-0.064	-0.049	7.2497	0.779
		13	-0.171	-0.294	8.9631	0.706
		14	-0.070	-0.022	9.2673	0.752
		15	0.005	-0.074	9.2689	0.813
		16	-0.085	0.032	9.7568	0.835

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Date: 01/03/15 Time: 19:55

Sample: 1970 2006

Included observations: 36

Q-statistic probabilities adjusted for 1 ARMA term and 1 dynamic regressor

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
		1	0.017	0.017	0.0111	
		2	0.223	0.223	2.0191	0.155
		3	0.130	0.130	2.7186	0.257
		4	-0.231	-0.301	5.0058	0.171
		5	0.029	-0.031	5.0428	0.283
		6	-0.216	-0.117	7.1774	0.208
		7	0.030	0.122	7.2198	0.301
		8	-0.114	-0.118	7.8577	0.345
		9	-0.183	-0.200	9.5626	0.297
		10	0.045	-0.001	9.6671	0.378
		11	-0.219	-0.081	12.292	0.266
		12	-0.028	-0.073	12.336	0.339
		13	-0.125	-0.169	13.265	0.350
		14	-0.088	-0.074	13.748	0.392
		15	-0.031	-0.091	13.809	0.464
		16	-0.127	-0.110	14.918	0.457

*Probabilities may not be valid for this equation specification.

Figura 11: Output do Eviews do teste de Ljung e Box aplicados ao modelo ARIMA(1,1,0) e ARIMA(0,1,1).

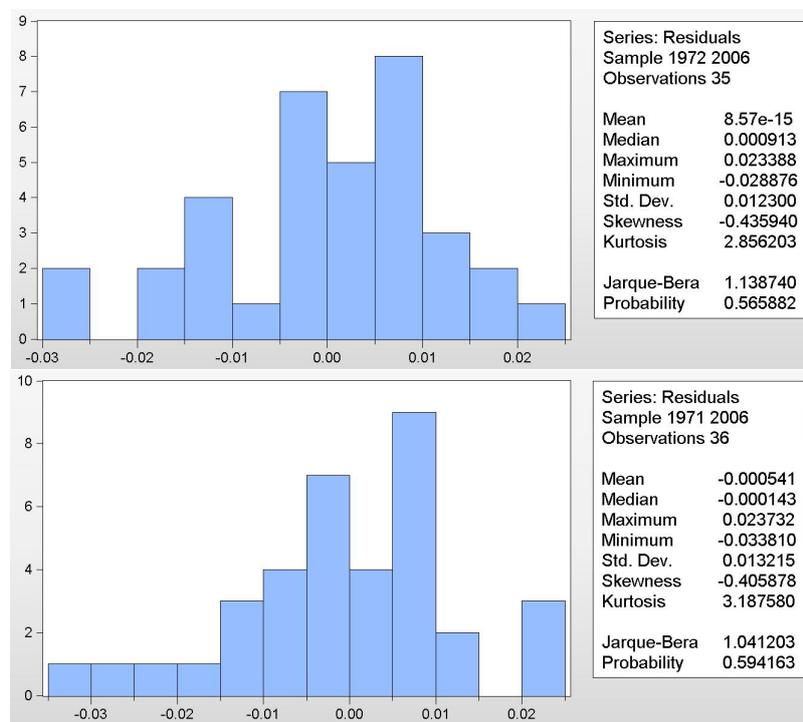


Figura 12: Output do Eviews do teste de normalidade aos resíduos aplicados ao modelo ARIMA(1,1,0) e ARIMA(0,1,1).