Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2014/2015
Época Normal: 5 de Junho de 2015
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{e^{2-x-x^2}} < 1 \right\}$ e $B = \left\{ \cos\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, caso existam, do conjunto B.

(c) Calcule a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$, a fronteira de B e o conjunto dos pontos de acumulação de B.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\exists \epsilon > 0 : \,]1-\epsilon, 1+\epsilon[\subseteq \mathbb{R} \backslash A$;

ii. $\exists x \in B : \; b \leq x, \; \forall\, b \in B$;

(4,0) 2. (a) Prove, utlilizando o princípio de indução matemática, que

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+2)2^k = 2((n^2+1)2^n - 1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(b) Determine a função real de variável real f que verifica $f(1) = 1$ e $f'(x) = \ln(x^2+1)$.

(4,5) 3. Dado $a, b \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{\int_0^{ax} e^{t^2} dt}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso existam, os valores de a e de b para os quais se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Determine, ou prove que não existem, valores de a e de b para os quais f é diferenciável em $x = 0$.

(c) Considere $g(x) = xf(x)$ e indique, justificando, para que valores de $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a seguinte proposição é verdadeira:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \;\; x \leq y \Rightarrow g(x) \geq g(y);$$

(2,0) 4. Utilize o teorema de Lagrange para provar que,

$$tan(x) \geq x, \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^2 \frac{\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)\left(e^{2-x}-1\right)}{\sqrt[3]{4x^\alpha - x^{2+\alpha}}} dx.$$

(2,5) 6. Seja f uma função real de variável real, diferenciável em $\mathbb{R}$ e suponhamos que existem $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $f(a) = -f(b) = 1$. Considere a função $g(x) = xf(x)$.

(a) Prove que a equação $g'(x) = 0$ tem, pelo menos, uma solução real positiva.

(b) Prove que a equação $g'(x) = 1$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, a[$.