ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 2º semestre, EN** **11. 06. 15 V1**

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\text{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX+bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\,\text{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$;

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow E(X) = n\theta, Var(X) = n\theta(1-\theta)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x < 0)$; $X \sim G(\alpha,\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $2\lambda X \sim \chi^2_{(2\alpha)}$; $X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n}$; $S'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Sejam A, B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω .

	V	**F**
Se $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.4$, $P(A - B) = 0.1$ então A e B são acontecimentos independentes .		X
Se $A \cup B = \Omega$, e A e B incompatíveis, então $P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$	X	
Se $P(A \cup B \cup C) = 1$ e $P[A\|B] = P[B\|C] = 0$. Então A, B e C constituem uma partição do espaço de resultados.		X
Se $A = B \cup C$, então $P(A) \leq P(B)$		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$.

	V	**F**
Se $f(x)$ é função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X, então para $\forall x \in \mathcal{R}$ tem-se $0 \leq f(x) \leq 1$		X
Se X for discreta, $F(x)$ tem tantos pontos de descontinuidade quantos os elementos do conjunto $D_X = \{x: P(X = x) > 0\}$	X	
$P(a < X < c) = F(c) - F(a)$		X
Se X for discreta $E(X)$existe sempre		X

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X, Y) e $F_{X,Y}(x, y)$ a respectiva função distribuição conjunta .

	V	**F**
Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta. Se $a < b$ e $c < d$, $a, b, c, d \in N$, então $P(X < a, Y < c) \leq P(X \leq a, Y \leq c)$	X	
Seja (X, Y) uma variável aleatória discreta tal que $D_X = \{1, \cdots, 5\}$, $D_Y = \{0,1,2\}$. Se se verificar $P(Y = 1\|X = 3) \neq P(Y = 1)$ então X e Y não são independentes.	X	
Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional contínua. O 2º momento em relação à média da v.a X é dado por $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dydx$	X	
Se existirem $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos das variáveis aleatórias X e Y independentes então, $M_{X+Y}(s) = M_X(s) + M_Y(s)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
São efectuadas séries independentes de 8 lançamentos de um dado (6 faces) e de 6 lançamentos de um tetraedro (4 faces). Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que representam o número de faces 3 em cada uma das séries de lançamentos. Então, o número de faces 3 saídas no conjunto das duas séries de lançamentos tem distribuição $B\left(14, \frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)$		X
Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio λ por unidade de tempo, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0,2]$ e $\Delta t_2 = (2,5]$, então X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes.	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\forall\, a > 0, a \in \mathbb{R}$, então $P(X \geq \mu - a) < 0.5$		X
Se o número de ocorrências por unidade de tempo num processo de Poisson é bem representado pela variável X com média λ, o tempo médio até à 3^a ocorrência é igual a $3/\lambda$.	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X.

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as médias de duas amostras casuais independentes de dimensão n de uma mesma população X. Então $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$.		X
Existindo $Var(X)$, pode-se garantir que, existe $Var(\bar{X})$ e que esta é tanto menor quanto maior fôr a dimensão da amostra	X	
$Cov(X_i, X_j) = 0$, $i \neq j$ $(i, j = 1,2, \cdots, n)$.	X	
A média da amostra é sempre igual ao valor esperado da média do universo		X

6. Considere os acontecimento A B e C, com probabilidade positiva, definidos sobre o mesmo espaço de resultado, tais que A está contido em C e B e C são incompatíveis. Prove que $P[(A \cup B)|C] = \frac{P(A)}{P(C)}$.

[Cotação: 15]

$$P[(A \cup B)|C] = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \frac{P[A \cap C] + P[B \cap C] - P[A \cap B \cap C]}{P(C)}$$

Como $A \subset C \Rightarrow P[A \cap C] = P(A)$ e como B e C são incompatíveis, $P[B \cap C] = 0$ e

$P[A \cap B \cap C] = 0$ pelo que $P[(A \cup B)|C] = \frac{P(A)}{P(C)}$

7. Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X. Mostre que a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = a + bX$, $M_Y(s) = e^{as} M_X(bs)$ [Cotação: 15]

$$M_X(s) = E(e^{sX}),$$

como $Y = a + bX \Rightarrow M_Y(s) = E\left(e^{sY}\right) = E\left(e^{s(a+bX)}\right) = E\left(e^{sa+sbX}\right) = E\left(e^{sa} . e^{sbX}\right) =$

$$= e^{sa} . E(e^{sbX}) = e^{sa} . M_X(bs)$$

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____ **Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x!\,(\lambda>0,x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow E(X)=n\theta, Var(X)=n\theta(1-\theta)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ (x<0)$; $X\sim G(\alpha,\lambda)\Rightarrow E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$ e $2\lambda X\sim\chi^2_{(2\alpha)}$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$

$\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n}$; $S'^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Sejam A,B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω .

	V	F
Os acontecimentos A e B são independentes se não se podem realizar simultaneamente.		X
$P(B\cup C\mid C)=1$	X	
Se $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(A-B)=0.36$ então A e B são incompatíveis		X
Se $P(A\cup B\cup C)=1$ e $P[A\mid B]=P[A\mid C]=0$. Então A,B e C constituem uma partição do espaço de resultados.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$.

	V	F
Se $f(x)$ é função probabilidade de uma variável aleatória discreta X, então para $\forall x\in\mathcal{R}$ tem-se $0\leq f(x)\leq 1$	X	
Se X for uma variável aleatória mista, $F(x)$ tem pelo menos 1 ponto de descontinuidade com probabilidade positiva	X	
$P(a<X<c)\neq F_X(c)-F_X(a)$	X	
Se X for contínua $E(X)$existe sempre		X

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X,Y) e $F_{X,Y}(x,y)$ a respectiva função distribuição conjunta .

	V	F
Seja (X,Y)uma variável aleatória discreta. Se $a<b$ e $c<d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, então $P(X<a,Y\leq c)\leq P(X<b,Y\leq c)$	X	
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua definida em $\{(x,y)\colon 1<x<5; 0<y<3\}$, Se se verificar $P(Y\leq 1\mid X\leq 3)=P(Y\leq 1)$ então $X\ e\ Y$ são independentes.	X	
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua. O 2º momento em relação à média da v.a X é dado por $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)\,dydx$		X
Se variáveis aleatórias X e Y são independentes e existem $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos das variáveis aleatórias X e Y então, $M_{X+Y}(s)=M_X(s).M_Y(s)$	X	

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
São efectuadas séries independentes de 4 lançamentos de um dado A e de 6 lançamentos de um dado B, ambos regulares. Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que representam o número de faces 3 em cada uma das séries de lançamentos. Então, o número de faces 3 saídas no conjunto das duas séries de lançamentos tem distribuição $B\left(10, \frac{1}{6}\right)$	X	
Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio λ por unidade de tempo, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0,5]$ e $\Delta t_2 = (2,5]$, então X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes.		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\forall\, a > 0, a \in \mathbb{R}$ se tem $P(X \geq \mu + a) < 0.5$	X	
Se o número de ocorrências por unidade de tempo num processo de Poisson é bem representado pela variável X com média λ, o tempo médio que decorre até à 5 ocorrência é igual a 5λ.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X.

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as médias de duas amostras casuais independentes de dimensão n de uma população X. Então $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sigma^2/2n$.		X
Existindo $Var(X)$, pode-se garantir que, existe $Var(\bar{X})$ e que $\lim_{n\to\infty} Var\,(\bar{X}) = 0$	X	
$Cov\left(X_i,\ X_j\right) = \sigma^2 \quad i = j,\ (i,j = 1,2,\cdots,n)$.	X	
A média da amostra é sempre igual à média do universo		X

6. Considere os acontecimento A B e C, com probabilidade positiva, definidos sobre o mesmo espaço de resultado, tais que A está contido em C e B e C são incompatíveis. Prove que $P[(A \cup B)|C] = \frac{P(A)}{P(C)}$.

[Cotação: 15]

7. Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X. Mostre que a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = a + bX$, $M_Y(s) = e^{as} M_X(bs)$ [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minutos

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____ **Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A)\geq 0$ P2. $P(\Omega)=1$ P3. Se $A\cap B=\varnothing$ então $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$\mathrm{Var}(X)=E(X-\mu)^2=E(X^2)-\mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$; $\rho_{X,Y}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY)=a^2\mathrm{Var}(X)+b^2\mathrm{Var}(Y)+2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y)=E_X\left[E(Y\mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s)=E(e^{sX})$; $E(X^r)=M_X{}^{(r)}(0)$

$X\sim Po(\lambda)\Rightarrow f(x)=\left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x\,!\,(\lambda>0, x=0,1,\cdots)$; $X\sim B(n,\theta)\Rightarrow E(X)=n\theta, Var(X)=n\theta(1-\theta)$

$X\sim Ex(\lambda)\Rightarrow F(x)=1-e^{-\lambda x}\ \ (x<0)$; $X\sim G(\alpha,\lambda)\Rightarrow E(X)=\frac{\alpha}{\lambda}$ e $2\lambda X\sim\chi^2_{(2\alpha)}$; $X\sim\chi^2_{(n)}$ então $E(X)=n$; $\mathrm{Var}(X)=2n$

$\overline{X}=\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n}$; $S'^2=\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2=n\,S^2$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Sejam A,B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω .

	V	F
Se $1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(A)\times P(B)$, pode afirmar-se que os acontecimentos A e B são independentes	X	
Se $P(A)=0.6,\ P(B)=0.4,\ P(A-B)=0.6$ então A e B são incompatíveis	X	
Se $A=B\cup C$, então $P(A)\geq P(B)$	X	
Se $P(A\cup B\cup C)=1$ e $P[A\|B]\neq 0, P[A\|C]\neq 0$. Então A,B e C constituem uma partição do espaço de resultados.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$ e $a\in\Re$.

	V	F
Se $F(x)$ é função distribuição de uma variável aleatória mista X, então para $\forall x\in\mathcal{R}$ tem-se $0\leq F(x)\leq 1$	X	
Se X for uma variável aleatória contínua, $F(x)$ não tem pontos de descontinuidade	X	
$P(a\leq X<c)=F_X(c)-F_X(a)$		X
Se X for discreta $E(X)$pode não existir	X	

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X,Y) e $F_{X,Y}(x,y)$ a respectiva função distribuição conjunta .

	V	F
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua. Se $a<b$ e $c<d$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, então $P(X<a,Y\leq c)\leq P(X<a,Y\leq d)$	X	
Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta tal que $D_X=\{1,\cdots,5\}$, $D_Y=\{0,1,2\}$. Se se verificar $P(X=3\|Y=2)=P(X=3)$ então $X\ e\ Y$ são independentes.		X
Seja (X,Y) uma variável aleatória discreta. O 2º momento em relação à média da v.a X é dado por $\sum_{x\epsilon D_X}\sum_{y\epsilon D_Y}(x-\mu_X)^2 f(x,y)$		X
Se existirem $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos das variáveis aleatórias X e Y dependentes então, $M_{X+Y}(s)=M_X(s).M_Y(s)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
São efectuadas séries independentes de 8 lançamentos de um dado (6 faces) e de 6 lançamentos de um octaedro (8 faces). Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que representam o número de faces 3 em cada uma das séries de lançamentos. Então, o número de faces 3 saídas no conjunto das duas séries de lançamentos tem distribuição $B\left(14,\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)$		X
Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio λ por unidade de tempo, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (0,3]$ e $\Delta t_2 = (3,5]$, então X_1 e X_2 são variáveis aleatórias dependentes.		X
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\forall\, a > 0, a \in \mathbb{R}$ se tem $P(X \leq \mu + a) > 0.5$	X	
Se o número de ocorrências por unidade de tempo num processo de Poisson é bem representado pela variável X com média λ, o tempo médio que decorre até à 4ª ocorrência consecutiva é igual a $4/\lambda$	X	

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X.

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as médias de duas amostras casuais independentes respectivamente de dimensões n_1 e n_2 $(n_1 \neq n_2)$ de uma população X. Então $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 0$.	X	
Existindo $Var(X)$, pode-se garantir que, existe $Var(\bar{X})$ e que $\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = 0$	X	
$E(X_i - X_j) \neq 0 \quad i \neq j, (i,j = 1,2,\cdots,n)$.		X
A média do universo coincide com o valor esperado da média da amostra.	X	

6. Considere os acontecimento A B e C, com probabilidade positiva, definidos sobre o mesmo espaço de resultado, tais que A está contido em C e B e C são incompatíveis. Prove que $P[(A \cup B)|C] = \frac{P(A)}{P(C)}$.

[Cotação: 15]

7. Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X. Mostre que a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = a + bX$, $M_Y(s) = e^{as}M_X(bs)$ [Cotação: 15]

1ª Parte - Teórica – 40 minuto

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____ **Número:**_________

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\mathrm{Var}(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\}$; $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$X \sim Po(\lambda) \Rightarrow f(x) = \left(e^{-\lambda}\lambda^x\right)/x\,!\,(\lambda > 0, x = 0,1,\cdots)$; $X \sim B(n,\theta) \Rightarrow E(X) = n\theta, Var(X) = n\theta(1-\theta)$

$X \sim Ex(\lambda) \Rightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda x}\ \ (x < 0)$; $X \sim G(\alpha,\lambda) \Rightarrow E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ e $2\lambda X \sim \chi^2_{(2\alpha)}$; $X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\mathrm{Var}(X) = 2n$

$\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n}$; $S'^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Sejam A, B e C acontecimentos com probabilidade positiva de um espaço de resultados Ω.

	V	**F**
Se $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.4,\ P(A \cap B) = 0.24$ então os acontecimentos A e B são incompatíveis		X
Se A e B são independentes $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$		X
$P(B \cup C \mid C) = P(B)/P(C)$		X
Se $P(A \cup B \cup C) = 1$ e $P[B \mid C] \neq 0$. Então A, B e C constituem uma partição do espaço de resultados.		X

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$ e $a \in \Re$.

	V	**F**
Se $f(x)$ é função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua X, então para $\forall x \in \mathcal{R}$ tem-se $f(x) \geq 0$	X	
Se X for uma variável aleatória mista, $F(x)$ não tem pontos de descontinuidade com probabilidade positiva		X
$P(a \leq X \leq c) \neq F_X(c) - F_X(a)$		X
Se X for discreta $E(X)$ não existe se o conjunto D_x for uma infinidade numerável		X

3. Considere a variável aleatória bidimensional (X,Y) e $F_{X,Y}(x,y)$ a respectiva função distribuição conjunta

	V	**F**
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua. Se $a < b$ e $c < d$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, então $P(X < b, Y \leq c) \leq P(X < b, Y \leq d)$	X	
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua definida em $\{(x,y)\colon 1 < x < 5; 0 < y < 3\}$, Se se verificar $P(Y \leq 1 \mid X \leq 3) = P(Y \leq 1)$ então $X\ e\ Y$ são independentes.	X	
Seja (X,Y) uma variável aleatória contínua. O 2º momento em relação à média da v.a Y é dado por $\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\mu_Y)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$	X	
Se existirem $M_X(s)$ e $M_Y(s)$ funções geradoras de momentos das variáveis aleatórias X e Y independentes então, $M_{X+Y}(s) = M_X(s) + M_Y(s)$		X

vsff →

4. Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*:

	V	F
São efectuadas duas séries independentes de 8 lançamentos de um dado A regular. Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que representam o número de faces 3 em cada uma das séries de lançamentos. Então, o número de faces 3 saídas no conjunto das duas séries de lançamentos tem distribuição $B\left(16,\frac{1}{2}\right)$	X	
Sejam X_1 e X_2 o número de ocorrências de um processo de Poisson com ritmo médio λ por unidade de tempo, respectivamente nos intervalos $\Delta t_1 = (2,4]$ e $\Delta t_2 = (3,6]$, então X_1 e X_2 são variáveis aleatórias dependentes.	X	
Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, então $\forall\, a > 0, a \in \mathbb{R}$ se tem $P(X \leq \mu + a) < 0.5$		X
Se o número de ocorrências por unidade de tempo num processo de Poisson é bem representado pela variável X com média λ, o tempo médio que decorre até à 2^a ocorrência é igual a 2λ.		X

5. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de um universo X.

	V	F
Sejam $\bar{X}_1$ e $\bar{X}_2$ as médias de duas amostras casuais independentes de dimensão n de uma população X. Então $Var(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = 2\,\sigma^2/n$.	X	
Existindo $Var(X)$, pode-se garantir que, existe $Var(\bar{X})$ e que $\lim_{n\to\infty} Var\,(\bar{X}) = Var(X)$		X
$E(X_i - X_j) = 0 \quad i \neq j,\ (i,j = 1,2,\cdots,n)$.	X	
A média da média da amostra é igual à média do universo	X	

6. Considere os acontecimento A B e C, com probabilidade positiva, definidos sobre o mesmo espaço de resultado, tais que A está contido em C e B e C são incompatíveis. Prove que $P[(A \cup B)|C] = \frac{P(A)}{P(C)}$.
[Cotação: 15]

7. Seja $M_X(s)$ a função geradora de momentos da variável aleatória X. Mostre que a função geradora de momentos da variável aleatória $Y = a + bX$, $M_Y(s) = e^{as}M_X(bs)$ [Cotação: 15]

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(20)	2c.(15)	3a.(10)	4.(20)	T:
1b.(20)	2b (10)		3b.(15)		P:

1. Uma dada empresa possui 2 fábricas A e B de funcionamento independente. Em ambas a proporção de peças com defeito por dia (12 horas de laboração), é de 5%. São produzidas diariamente, respectivamente, 100 peças na fábrica A e 300 na B.

a) Qual a probabilidade de a empresa produzir 25 ou mais peças defeituosas por dia ?

0.1568 X 0.1510 X 0.1065 ☐ 0.1122 ☐

b) Seleccionada uma amostra casual de 20 peças da produção diária da empresa, qual a probabilidade de a proporção amostral de peças com defeito diferir, em valor absoluto, da verdadeira proporção de peças defeituosas por valor inferior a 0.01?

$$P(|\bar{X}-\theta|<0.01)=P(-0.01<\bar{X}-\theta<0.01)$$

$$=P\left(\frac{-0.01}{\sqrt{\frac{0.05*0.95}{20}}}<\frac{\bar{X}-\theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}}<\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.05*0.95}{20}}}\right)\approx P(-0.205<Z<0.205)$$

$$P(-0.205<Z<0.205)=normalcdf(-0.205{,}0.205{,}0{,}1)=0.1626$$

Ou

$$P(-0.205<Z<0.205)=2*\Phi(0.21)-1=2*0.5832-1=0.1664$$

2. A diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro numa certa paragem, em minutos, é uma variável aleatória, X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & -4 < x < 4 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

a) Determine a mediana da distribuição.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx = \begin{cases} 0 & x \leq -4 \\ \int_{-4}^{x} \frac{x+1}{8} dx = \frac{1}{8}\left[\frac{x^2}{2} + x - 4\right] & -4 < x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\mu_e: F_X(\mu_e) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\left[\frac{{\mu_e}^2}{2} + \mu_e - 4\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mu_e = 3{,}123$$

b) Em média qual a diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem?

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f_X(x)dx = \int_{-4}^{4} x.\frac{x+1}{8} dx = \frac{1}{8}\int_{-4}^{4} x^2 + x\ dx = \frac{16}{3}$$

c) Seleccionada uma amostra de dimensão 5 da diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem, determine a probabilidade de a maior diferença ser inferior a 3 minutos.

$(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}, \cdots, \boldsymbol{X_5})$ amostra casual

$$P(Max\{X_i\} < 3) = P\left(X_{(n)} < 3\right) = [F_X(3)]^5 = \left(\frac{7}{16}\right)^5 = 0{,}016$$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta e a função representada na tabela seguinte:

$x \setminus y$	0	1	2	3	$f_X(x)$
0	0	k	$2k$	$3k$	$6k$
1	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$	$14k$
2	$4k$	$5k$	$6k$	$7k$	$22k$
$f_Y(y)$	$6k$	$9k$	$12k$	$15k$	$42k$

a) Obtenha o valor de k para o qual a função acima é uma função probabilidade conjunta.

$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{3} f_{XY}(x,y) = 42k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{42}$ ou

$\sum_{x\in D_X} f_X(x) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = \cdots$ ou $\sum_{y\in D_Y} f_Y(y) = \sum_{y=0}^{3} f_Y(y) = \cdots$

b) Calcule $E(X \mid Y=0)$. [Nota: se não conseguiu encontrar o valor de k na alínea anterior, trabalhe com k]

$\frac{5}{3}$ X $\quad$ $\frac{13}{9}$ ☐ $\quad$ $\frac{7}{3}$ ☐ $\quad$ $\frac{19}{15}$ ☐

4. A variável aleatória X representa a duração, em horas, das lâmpadas da marca X. Sabe-se que a variável aleatória X tem distribuição Exponencial de média igual a 1400.
Considere a experiência aleatória que consiste em ligar uma nova lâmpada após a explosão da anterior. Ligaram-se sucessivamente 5 lâmpadas. Qual a probabilidade de a duração total das 5 lâmpadas ser superior a 6650 horas?

X- duração, em horas, das lâmpadas da marca $X \sim Ex(1/1400)$

Y- duração total das 5 lâmpadas= $\sum_{i=1}^{5} X_i \sim G\left(5, \frac{1}{1400}\right) \Rightarrow 2\Lambda \sum_{i=1}^{5} X_i \sim \chi^2_{(10)}$

$$P(Y > 6650) = P\left(2\Lambda \sum_{i=1}^{5} X_i > 2 \cdot \frac{1}{1400} \cdot 6650\right) = P\left(\chi^2_{(10)} > 9{,}5\right)$$

$$P\left(\chi^2_{(10)} > 9{,}5\right) = chicdf(9.5{,}10) = 0{,}4854$$

Ou

$$P\left(\chi^2_{(10)} > 9{,}5\right) \approx 0.5 \text{ (Tabela)}$$

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(20)	2c.(15)	3a.(10)	4.(20)	T:
1b.(20)	2b (10)		3b.(15)		P:

1. Uma dada empresa possui 2 fábricas A e B de funcionamento independente. Em ambas a proporção de peças com defeito por dia (12 horas de laboração), é de 5%. São produzidas diariamente, respectivamente, 100 peças na fábrica A e 300 na B.

a) Qual a probabilidade de a empresa produzir 20 ou mais peças defeituosas por dia ?

0.4409 ☐ 0.5297 X 0.9091 ☐ 0.5320 X

b) Seleccionada uma amostra casual de 20 peças da produção diária da empresa, qual a probabilidade de a proporção amostral de peças com defeito diferir, em valor absoluto, da verdadeira proporção de peças defeituosas por valor inferior a 0.01?

2. A diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro numa certa paragem, em minutos, é uma variável aleatória, X , com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & -4 < x < 4 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

a) Determine a mediana da distribuição.

b) Em média qual a diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem?

c) Seleccionada uma amostra de dimensão 5 da diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem, qual a probabilidade de a menor diferença ser superior a 3 minutos

$$P(Min\{X_i\} > 3) = 1 - P\left(X_{(1)} < 3\right) = 1 - \{1 - [1 - F_X(3)]^5\} = \left[1 - \left(\frac{7}{16}\right)\right]^5 = 0{,}178$$

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta e a função representada na tabela seguinte:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	k	$2k$	$3k$
1	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$
2	$4k$	$5k$	$6k$	$7k$

a) Obtenha o valor de k para o qual a função acima é uma função probabilidade conjunta.

b) Calcule $E(X \mid Y=1)$ e interprete o resultado.

$\frac{5}{3}$ ☐ $\frac{13}{9}$ X $\frac{7}{3}$ ☐ $\frac{19}{15}$ ☐

4. A variável aleatória X representa a duração, em horas, das lâmpadas da marca X. Sabe-se que a variável aleatória X tem distribuição Exponencial de média igual a 1400.
Considere a experiência aleatória que consiste em ligar uma nova lâmpada após a explosão da anterior. Ligaram-se sucessivamente 5 lâmpadas. Qual a probabilidade de a duração total das 5 lâmpadas ser superior a 6650 horas?

ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças – Exame Época Normal - 11. 06. 15 V3

2ª Parte – Prática – 80 minutos

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(20)	2c.(15)	3a.(10)	4.(20)	T:
1b.(20)	2b (10)		3b.(15)		P:

1. Uma dada empresa possui 2 fábricas A e B de funcionamento independente. Em ambas a proporção de peças com defeito por dia (12 horas de laboração), é de 5%. São produzidas diariamente, respectivamente, 100 peças na fábrica A e 300 na B.

a) Qual a probabilidade de a empresa produzir 15 ou mais peças defeituosas por dia ?

0.8951 X 0.8435 ☐ 0.9010 X 0.8501 ☐

b) Seleccionada uma amostra casual de 20 peças da produção diária da empresa, qual a probabilidade de a proporção amostral de peças com defeito diferir, em valor absoluto, da verdadeira proporção de peças defeituosas por valor inferior a 0.01?

2. A diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro numa certa paragem, em minutos, é uma variável aleatória, X , com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & -4 < x < 4 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

a) Determine a mediana da distribuição.

b) Em média qual a diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem?

c) Seleccionada uma amostra de dimensão 5 da diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem, qual a probabilidade de a menor diferença ser superior a 3 minutos

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta e a função representada na tabela seguinte:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0	k	$2k$	$3k$
1	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$
2	$4k$	$5k$	$6k$	$7k$

a) Obtenha o valor de k para o qual a função acima é uma função probabilidade conjunta.

b) Calcule $E(X \mid Y=2)$. [Nota: se não conseguiu encontrar o valor de k na alínea anterior, trabalhe com k]

$\frac{5}{3}$ ☐ $\frac{13}{9}$ ☐ $\frac{7}{3}$ X $\frac{19}{15}$ ☐

4. A variável aleatória X representa a duração, em horas, das lâmpadas da marca X. Sabe-se que a variável aleatória X tem distribuição Exponencial de média igual a 1400.
Considere a experiência aleatória que consiste em ligar uma nova lâmpada após a explosão da anterior. Ligaram-se sucessivamente 5 lâmpadas. Qual a probabilidade de a duração total das 5 lâmpadas ser superior a 6650 horas?

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2a.(20)	2c.(15)	3a.(10)	4.(20)	T:
1b.(20)	2b (10)		3b.(15)		P:

1. Uma dada empresa possui 2 fábricas A e B de funcionamento independente. Em ambas a proporção de peças com defeito por dia (12 horas de laboração), é de 5%. São produzidas diariamente, respectivamente, 100 peças na fábrica A e 300 na B.

a) Qual a probabilidade de a empresa produzir 10 ou mais peças defeituosas por dia ?

0.0135 ☐ 0.0190 X 0.0218 X 0.0114 ☐

b) Seleccionada uma amostra casual de 20 peças da produção diária da empresa, qual a probabilidade de a proporção amostral de peças com defeito diferir, em valor absoluto, da verdadeira proporção de peças defeituosas por valor inferior a 0.01?

2. A diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro numa certa paragem, em minutos, é uma variável aleatória, X , com função densidade de probabilidade dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{8} & -4 < x < 4 \\ 0 & outros\ x \end{cases}$$

a) Determine a mediana da distribuição.

b) Em média qual a diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem?

c) Seleccionada uma amostra de dimensão 5 da diferença entre a hora de passagem na tabela e o momento efectivo de passagem do autocarro nessa paragem, qual a probabilidade de a menor diferença ser superior a 3 minutos

3. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional discreta e a função representada na tabela seguinte:

$x \backslash y$	0	1	2	3
0	0	k	$2k$	$3k$
1	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$
2	$4k$	$5k$	$6k$	$7k$

a) Obtenha o valor de k para o qual a função acima é uma função probabilidade conjunta.

b) Calcule $E(X \mid Y=3)$ e interprete o resultado. [Nota: se não conseguiu encontrar o valor de k na alínea anterior, trabalhe com k]

$\frac{5}{3}$ □ $\frac{13}{9}$ □ $\frac{4}{3}$ □ $\frac{19}{15}$ X

4. A variável aleatória X representa a duração, em horas, das lâmpadas da marca X. Sabe-se que a variável aleatória X tem distribuição Exponencial de média igual a 1400.
Considere a experiência aleatória que consiste em ligar uma nova lâmpada após a explosão da anterior. Ligaram-se sucessivamente 5 lâmpadas. Qual a probabilidade de a duração total das 5 lâmpadas ser superior a 6650 horas?