INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

1. **(2,5)** Resolva o PVI $\begin{cases} xe^{x^2}x' - \dfrac{t}{1+t^2} = 0 \\ x(1) = 2 \end{cases}$.

2. Considere a seguinte equação diferencial de 3ª ordem

$$x''' + x'' - 2x' = 0 .$$

a) **(1,5)** Para que condições iniciais $x(0), x'(0)$ e $x''(0)$, existe uma solução não nula, $x(t)$, limitada para $t \geq 0$.

b) **(2,0)** Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada, e mostre que $\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{-2t} \\ 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções para o sistema obtido.

c) **(2,0)** Determine e^{At}, onde A é a matriz associada ao sistema, e calcule a solução do sistema que verifica a condição inicial $x(0) = 1,\ y(0) = 1$ e $z(0) = -1$.

3. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x\,sen\left(x^2 + y^2\right) \\ y' = xy + y\,sen\left(x^2 + y^2\right) \end{cases}.$$

a) **(1,0)** Mostre que $\left(\sqrt{k\pi}, 0\right)$ são soluções de equilíbrio do sistema, com $k \in Z^+$.

b) **(2,5)** Classifique os referidos pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

II

Considere o operador diferença Δ, definido por $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$. Atenda à seguinte

Definição: Se $\Delta X_n = x_n$, define-se **operador antidiferença de** x_n, e representa-se por

$$\Delta^{-1} x_n, \quad \Delta^{-1} x_n = X_n + C, \text{ com } C \in \Re.$$

a) **(1,0)** Mostre que $\Delta\Delta^{-1} = I$ e $\Delta^{-1}\Delta \neq I$.

b) **(1,5)** Calcule os operadores diferença e antidiferença da sucessão $u_n = a^n$, $n \in N$ e $a \neq 1$.

c) **(2,0)** Com base na alínea anterior resolva o PVI $\begin{cases} \Delta x_n = (-2)^n \\ x(1) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

III

Seja a função complexa de variável complexa, $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 + 7z - 5}$.

a) **(1,5)** Determine e classifique as singularidades da função.

b) **(2,5)** Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_{|z|=2} f(z)\,dz$, mostrando que ambos os teoremas, Fórmulas Integrais de Cauchy e Resíduos de Cauchy, são aplicáveis, justificando convenientemente.

fim