TÓPICOS DE RESOLUÇÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

I

1. Resolva o PVI $\begin{cases} xe^{x^2}x' - \dfrac{t}{1+t^2} = 0 \\ x(1) = 2 \end{cases}$.

   EDO não linear de 1ª ordem de variáveis separáveis,

   $$\int_2^x se^{s^2}\,ds = \int_1^t \frac{l}{1+l^2}\,dl \Leftrightarrow e^{x^2} = e^4 + \log\left(\frac{1+t^2}{2}\right).$$

2. Considere a seguinte equação diferencial de 3ª ordem

   $$x''' + x'' - 2x' = 0.$$

   a) Para que condições iniciais $x(0), x'(0)$ e $x''(0)$, existe uma solução não nula, $x(t)$, limitada para $t \geq 0$.

   EDO linear de 3ª ordem de coeficientes constantes homogénea, $P(D) = 0 \Leftrightarrow D = 0 \vee D = 1 \vee D = -2$, a solução geral é $x(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{-2t}$ e para que esta função seja limitada para $t \geq 0$ então $|x(t)| \leq |C_1| + |C_2|e^t + |C_3|e^{-2t} \leq K$ para $t \geq 0$, se $C_2 = 0$. Neste caso as c.i. serão da forma $x(0) = a + b, x'(0) = -2b$ e $x''(0) = 4b$ com $a, b \in \Re$ e não simultaneamente nulos.

   b) Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada, e mostre que $\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{-2t} \\ 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz fundamental de soluções para o sistema obtido.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 2y - z \end{cases}$$, cuja matriz associada ao sistema é $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Pretende-se provar que i. $\phi'(t) = A\phi = \begin{bmatrix} 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \\ 0 & e^t & -8e^{-2t} \end{bmatrix}$, o que é verdade e ii. $|\phi(t)| = 6e^{-t} \neq 0 \ \forall t \in I = \Re$. Estas duas condições constituem uma c.n.s. para que ϕ seja uma matriz fundamental de soluções do sistema.

c) Determine e^{At}, onde A é a matriz associada ao sistema, e calcule a solução do sistema que verifica a condição inicial $x(0) = 1, \ y(0) = 1$ e $z(0) = -1$.

Pelo Teorema Fundamental dos Sistemas Lineares, a solução do sistema é dada por $X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para o cálculo da matriz e^{At} utiliza-se a matriz fundamental de soluções dada na alínea anterior pois $e^{At} = \phi(t)\phi^{-1}(0)$.

Assim, $\phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ e a solução do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right) \\ y(t) = \frac{1}{3}\left(e^t + 2e^{-2t}\right) \\ z(t) = \frac{1}{3}\left(e^t - 4e^{-2t}\right) \end{cases}.$$

3. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x\,sen(x^2+y^2) \\ y' = xy + y\,sen(x^2+y^2) \end{cases}.$$

a) Mostre que $(\sqrt{k\pi}, 0)$ são soluções de equilíbrio do sistema, com $k \in Z^+$.

Pretende-se mostrar $\begin{cases} f_1(\sqrt{k\pi}, 0) = 0 \\ f_2(\sqrt{k\pi}, 0) = 0 \end{cases}$, o que é verdadeiro pois $sen(k\pi) = 0,\ k \in Z^+$.

b) Classifique os referidos pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

Sistema não linear, procedendo à linearização obtem-se

$$Df(\sqrt{k\pi}, 0) = \begin{bmatrix} sen(x^2+y^2) + 2x^2\cos(x^2+y^2) & -2y + 2xy\cos(x^2+y^2) \\ y + 2xy\cos(x^2+y^2) & x + sen(x^2+y^2) + 2y^2\cos(x^2+y^2) \end{bmatrix}_{(\sqrt{k\pi}, 0)}$$

$$= \begin{bmatrix} 2k\pi\cos(k\pi) & 0 \\ 0 & \sqrt{k\pi} \end{bmatrix},$$

cujos valores próprios são os elementos da diagonal. Assim, se k é par os valores próprios são positivos, $\lambda = 2\,k\pi \vee \lambda = \sqrt{k\pi}$, e os pontos de equilíbrio designam-se fontes e são instáveis; se k é ímpar os valores próprios são $\lambda = -2\,k\pi$ negativos, e $\lambda = \sqrt{k\pi}$ positivos, e os pontos de equilíbrio designam-se pontos de sela e são instáveis.

II

Considere o operador diferença Δ, definido por $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$. Atenda à seguinte

Definição: Se $\Delta X_n = x_n$, define-se **operador antidiferença de** x_n, e representa-se por

$$\Delta^{-1}x_n,\quad \Delta^{-1}x_n = X_n + C, \text{ com } C \in \Re.$$

a) Mostre que $\Delta\Delta^{-1} = I$ e $\Delta^{-1}\Delta \neq I$.

De acordo com a definição,

$\Delta\Delta^{-1}x_n = \Delta(X_n + C) = X_{n+1} + C - X_n - C = \Delta X_n = x_n$ o que prova $\Delta\Delta^{-1} = I$.

$\Delta^{-1}\Delta X_n = \Delta^{-1}x_n = X_n + C \neq X_n \quad \forall C \neq 0$, o que prova $\Delta^{-1}\Delta \neq I$.

b) Calcule os operadores diferença e antidiferença da sucessão $u_n = a^n$, $n \in N$ e $a \neq 1$.

$\Delta u_n = \Delta a^n = a^n(a-1)$

$\Delta^{-1}u_n = \Delta^{-1}a^n = \dfrac{a-1}{a-1}\Delta^{-1}a^n = \dfrac{a^n}{a-1}.$

c) Com base na alínea anterior resolva o PVI $\begin{cases} \Delta x_n = (-2)^n \\ x(1) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$.

$\Delta x_n = (-2)^n \underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \Delta^{-1}(-2)^n = x_n + C \underset{b)}{\Leftrightarrow} \dfrac{(-2)^n}{-2-1} = x_n + C \Leftrightarrow x_n = \dfrac{(-2)^n}{-3} + A$

$x(1) = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow A = 0.$

Assim, a solução do PVI é $x_n = \dfrac{(-2)^n}{-3}$.

III

Seja a função complexa de variável complexa, $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 + 7z - 5}$.

a) Determine e classifique as singularidades da função.

As singularidades são $z = 1, z = 1+2i, z = 1-2i$. Todas são pólos simples,

$\lim\limits_{z\to 1} f(z) = \infty \wedge \lim\limits_{z\to 1}(z-1)f(z) = \dfrac{1}{4}$,

$\lim\limits_{z\to 1+2i} f(z) = \infty \wedge \lim\limits_{z\to 1+2i}(z-1-2i)f(z) = -\dfrac{1}{8}$,

$\lim\limits_{z\to 1-2i} f(z) = \infty \wedge \lim\limits_{z\to 1-2i}(z-1+2i)f(z) = -\dfrac{1}{8}$.

b) Calcule o valor do integral $\int_{|z|=2} f(z)dz$, mostrando que ambos os teoremas, Fórmulas Integrais de Cauchy e Resíduos de Cauchy, são aplicáveis, justificando convenientemente.

$\begin{matrix} z = 1 \in \text{int}\,\gamma \\ z = 1 \pm 2i \in ext\gamma, \end{matrix}$ onde $\gamma = \{z \in C : |z| = 2\}$.

Pelas Fórmulas Integrais de Cauchy,

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{1/(z^2 - 2z + 5)}{z-1} dz = 2\pi i h(1) = \frac{\pi i}{2} \quad \text{com} \quad h(z) = 1/(z^2 - 2z + 5),$$

pois h é holomorfa no simplesmente conexo $A = \{z \in C : |z| < \sqrt{5}\}$ e γ é uma curva de Jordan regular que contém no seu interior a singularidade $z = 1$.

Pelo Teorema dos Resíduos, $\int_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,1) = \frac{\pi i}{2}$.

fim