Universidade de Lisboa - Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

NOME____

Número__________________ Curso_____________________________________

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 24 de junho de 2015 - Duração: 2 horas - - -

Grupo I

Escolha múltipla. **Cotações:** cada resposta certa $+1.5$; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota**: um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere os vectores $\overrightarrow{x} = (1, -3, 2, 3\alpha)$ e $\overrightarrow{y} = (-1, \beta, -4, 1)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são escalares. Os vectores $\overrightarrow{x}$ e $\overrightarrow{y}$ são ortogonais se e só se

(A) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(B) $\alpha = \beta + 3$.

(C) $\alpha = \beta - 9$.

(D) $\alpha = \beta$.

2. Considere a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln(5+x)}}{e^{x^2-1} - 1}$. O domínio de f é:

(A) $D_f = [-4, +\infty[\backslash\{-1, 1\}$ e o conjunto não é aberto nem fechado.

(B) $D_f = [-4, +\infty[\backslash\{-1, 1\}$ e o conjunto é aberto.

(C) $D_f = [-4, +\infty[$ e o conjunto é fechado.

(D) $D_f = [-4, +\infty[$ e $\text{front}(D_f) = 4$.

3. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-2}\right)^n$

(A) diverge e a sua soma é $\dfrac{e^2}{e^2-1}$.

(B) diverge e não tem soma.

(C) converge e a sua soma é $\dfrac{e^2}{e^2-1}$.

(D) converge e a sua soma é $\dfrac{1}{e^2-1}$.

4. Sejam f e g funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e com derivada contínua em $\mathbb{R}$, e seja h a função definida por $h(x) = f(g(x))$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

(A) Se $h(0) = h(1) = 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in]0, 1[$ onde f' se anula.

(**B**) Se $f'(x) > 0$ e $g'(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então h não tem nenhum zero no intervalo $]0, 1[$.

(**C**) Se $g(0) = -1$ e $f'(-1) = 0$, então h tem um extremo em $x = 0$.

(**D**) Se $g'(0) = 1$, $g'(1) = -1$ e f' é positiva em $\mathbb{R}$, então h tem pelo menos um ponto crítico no intervalo $]0, 1[$.

5. O integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\left[1 + (\ln x)^2\right]} dx$ é:

(A) divergente e o seu valor é $+\infty$.

(B) convergente e o seu valor é $\dfrac{\pi}{4}$.

(C) convergente e o seu valor é $-\pi$.

(D) divergente e o seu valor é $-\infty$.

Grupo II

(Cotações: 3.5 (=2.0+1.5); 4.5(=2.0+1.5+1.0); 3.0 (=1.5+1.5); 1.5)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+az=2 \\ -y+z=b \end{cases}, \qquad a,b\in\mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros a e b, indicando o grau de indeterminação (ou o n^o de graus de liberdade).

(b) Considerando $a=3$ e $b=2$, determine o valor de y (da solução) usando a regra de Cramer.

2. Considere a função $f(x)=\begin{cases} x^3-9x+10 \text{ se } x\leq 2, \\ -x^2+6x-8 \text{ se } x>2. \end{cases}$.

(a) Estude a função quanto à continuidade e diferenciabilidade (em particular, estude a continuidade e diferenciabilidade em $x=2$).

(b) Determine os pontos de estacionaridade (ou pontos críticos) e classifique-os.

(c) Estude a função quanto à concavidade/convexidade e existência de pontos de inflexão.

3. Determine:

(a) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$, em torno do ponto 2.

(b) Determine a derivada e os intervalos de monotonia da função $F(x)=\displaystyle\int_0^{x+x^2}\ln\left(2+t^2\right)dt$.

4. Considere três matrizes quadradas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$, todas de ordem $n\times n$. Estas matrizes diferem apenas na 1^a linha, sendo que cada elemento da 1^a linha de $\mathbf{C}$ é a soma dos elementos correspondentes das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prove que

$$\det\mathbf{C}=\det\mathbf{A}+\det\mathbf{B}.$$

(Sugestão: aplique o teorema de Laplace, desenvolvendo o determinante em termos da 1^a linha).