

NOME _____

Número _____ Curso _____

MATEMÁTICA I

Época de Recurso - 24 de junho de 2015 - Duração: 2 horas - - -

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Considere os vectores $\vec{x} = (1, -2, 2, 2\alpha)$ e $\vec{y} = (0, \beta, -4, 1)$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são escalares. Os vectores \vec{x} e \vec{y} são ortogonais se e só se

- (A) $\alpha = \beta$.
- (B) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
- (C) $\alpha = \beta - 8$.
- (D) $\alpha = \beta + 4$.

2. Considere a função $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(6-x)}}{e^{x^2}-1}$. O domínio de f é:

- (A) $D_f =]-\infty, 5]$ e $\text{front}(D_f) = 5$.
- (B) $D_f =]-\infty, 5] \setminus \{0\}$ e $\text{int}(D_f) =]-\infty, 5[\setminus \{0\}$.
- (C) $D_f =]-\infty, 5]$ e $\text{int}(D_f) =]-\infty, 5[$
- (D) $D_f =]-\infty, 5] \setminus \{0\}$ e o conjunto é aberto.

3. A série $\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-2})^n$

- (A) diverge e a sua soma é $\frac{1}{e^2-1}$.
- (B) diverge e não tem soma.
- (C) converge e a sua soma é $\frac{e^2}{e^2-1}$.
- (D) converge e a sua soma é $\frac{1}{e^2-1}$.

4. Sejam f e g funções diferenciáveis em \mathbb{R} , com derivada contínua em \mathbb{R} e seja h a função definida por $h(x) = f(g(x))$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- (A) Se $g(0) = 2$ e $f'(2) = 0$, então h tem um extremo em $x = 0$.
- (B) Se $f'(x) < 0$ e $g'(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então h não tem nenhum zero no intervalo $] - 1, 0[$.
- (C) Se $g'(-1) = -1$, $g'(0) = 1$ e f' é negativa em \mathbb{R} , então h tem pelo menos um ponto crítico no intervalo $] - 1, 0[$.
- (D) Se $h(-1) = h(0) = 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in] - 1, 0[$ onde f' se anula.

5. O integral impróprio $\int_e^{+\infty} \frac{2}{x [1 + (\ln x)^2]} dx$ é:

- (A) divergente e o seu valor é $-\infty$.
- (B) convergente e o seu valor é -2π .
- (C) convergente e o seu valor é $+\infty$.
- (D) convergente e o seu valor é $\frac{\pi}{2}$.

Grupo II

(Cotações: 3.5 (=2.0+1.5); 4.5(=2.0+1.5+1.0); 3.0 (=1.5+1.5); 1.5)

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + az = 2 \\ -y + z = b \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros a e b , indicando o grau de indeterminação (ou o n° de graus de liberdade).

(b) Considerando $a = 3$ e $b = 2$, determine o valor de y (da solução) usando a regra de Cramer.

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^3 - 9x + 10 & \text{se } x \leq 2, \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{se } x > 2. \end{cases}$

(a) Estude a função quanto à continuidade e diferenciabilidade (em particular, estude a continuidade e diferenciabilidade em $x = 2$).

(b) Determine os pontos de estacionaridade (ou pontos críticos) e classifique-os.

(c) Estude a função quanto à concavidade/convexidade e existência de pontos de inflexão.

3. Determine:

(a) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = \ln(1 + x^2)$, em torno do ponto 2.

(b) Determine a derivada e os intervalos de monotonia da função $F(x) = \int_0^{x+x^2} \ln(2 + t^2) dt$.

4. Considere três matrizes quadradas \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , todas de ordem $n \times n$. Estas matrizes diferem apenas na 1ª linha, sendo que cada elemento da 1ª linha de \mathbf{C} é a soma dos elementos correspondentes das matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Prove que

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{A} + \det \mathbf{B}.$$

(Sugestão: aplique o teorema de Laplace, desenvolvendo o determinante em termos da 1ª linha).