



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época de Recurso – 25 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

- a) (1,5)** Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $f(x) = \frac{1}{a^x}$ com $a > 0$, e indique o domínio de convergência da série.
- b) (1,5) Seja** $a \neq 1$. Usando a respectiva série, mostre que a derivada da função f de qualquer ordem no ponto 0, nunca se anula. Justifique se 0 é um ponto crítico de f .

II

Considere a função $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\log(\|x\| - 1)}{\|x\| - 2} + \sqrt{9 - \|x\|^2}, \text{ onde } x = (x_1, x_2) \text{ e } \|x\| \text{ é a norma de } x.$$

- a) (1,5)** Determine o domínio, D_f , da função f e represente-o graficamente.
- b) (1,5)** Determine o interior, a fronteira e o derivado do conjunto D_f , e justifique se este conjunto é compacto.

III

Seja a função $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^n y + kx}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ com } n \in N \text{ e } k \in \mathfrak{R}.$$

a) (1,5) Calcule o valor da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

b) (2,0) Estude a existência da derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, em função dos valores de $n \in N$ e $k \in \mathfrak{R}$.

c) (2,5) Para que valores de $n \in N$ e $k \in \mathfrak{R}$, a função f é diferenciável na origem?

IV

(2,5) Considere as funções vectoriais $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ e $g : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$ com f definida por $f(x, y) = (\arctg(x^2 - y), x^2)$ e g satisfazendo as condições

$$\forall x \in \mathfrak{R} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, 1) = (x^2, 1, x)$$

$$\forall y \in \mathfrak{R} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(0, y) = (0, y, 0)$$

Determine o valor da derivada $D(g \circ f)(1, 1)$.

V

(2,5) Discuta em função do parâmetro real $\alpha \neq 0$, a existência de extremantes para a função $f(x, y) = x^2 + (x - \alpha)y^2$, classificando-os em caso de existência.

VI

(3,0) Considere a função inteira, $f(x + iy) = u(x, y) + i2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$, com $u \in C^1(\mathfrak{R}^2)$.

Determine a função f tal que $f(i) = 0$ e calcule a sua derivada, f' .

fim