

Soluções

I

a) $f(x) = \frac{1}{a^x} = e^{-x \log a}$ com $a > 0$. Com base no desenvolvimento em série de

MacLaurin da função exponencial obtem-se $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \log^n a}{n!} x^n$, que é uma

série absolutamente convergente $\forall x \in \mathfrak{R}$, pois $|x| < r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n+1}{\log a} \right| = +\infty$.

b) Pela respectiva série, a derivada da função f de qualquer ordem no ponto 0 é $f^{(n)}(0) = (-1)^n \log^n a \neq 0 \quad \forall n \geq 0$, pois $a \neq 1$. Assim, 0 não é um ponto crítico de f pois $f'(0) = -\log a \neq 0$.

II

a) $D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : \|x\| > 1 \wedge \|x\| \neq 2 \wedge \|x\| \leq 3\}$.

b) $\text{int } D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : 1 < \|x\| < 3 \wedge \|x\| \neq 2\}$,

$\text{fr } D_f = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : \|x\| = 1 \vee \|x\| = 2 \vee \|x\| = 3\}$, e

$D_f' = \{(x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2 : 1 \leq \|x\| \leq 3\}$. O conjunto D_f não é compacto pois apesar de ser um conjunto limitado, $D_f \subset B_\varepsilon((0,0)) \quad \forall \varepsilon > 3$, não é fechado porque não contém todos os seus pontos fronteiros.

III

a) $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 0 \\ \infty & \text{se } k \neq 0 \end{cases}$. $\forall n \in \mathfrak{N}$ só existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ se $k = 0$.

c) Uma c.n. para que a função f seja diferenciável na origem é tomar-se $k = 0$.

Calcule-se, nestas condições, o seguinte limite,

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \varepsilon(h_1, h_2) = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1^n h_2}{\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)^3} = 0 \text{ se } n+1 > 3, \text{ pela proposição}$$

conhecida. Como n é uma variável natural, concluímos que se $n \geq 3$ então f é diferenciável na origem. Resta estudar a diferenciabilidade da função na origem nos casos $n = 1$ e $n = 2$. Utilizando os limites direccionais, obtem-se

$$\lim_{\substack{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0) \\ h_2 = mh_1}} \varepsilon(h_1, h_2) = \begin{cases} \infty & \text{se } n = 1 \\ \text{não existe} & \text{se } n = 2 \end{cases}. \text{ Conclui-se que } f \text{ é diferenciável na}$$

origem se $k = 0$ e $n \geq 3$.

IV

$$D(g \circ f)(1,1) = J_g(f(1,1)) \times J_f(1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

V

Os pontos críticos são $(0,0) \forall \alpha \neq 0$ e $(\alpha, \pm\sqrt{-2\alpha}) \forall \alpha < 0$. $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2\alpha \end{bmatrix}$,

sendo $(0,0)$ um minimizante local se $\alpha < 0$ e um ponto de sela se $\alpha > 0$.

$H_f(\alpha, \pm\sqrt{-2\alpha}) = \begin{bmatrix} 2 & \pm 2\sqrt{-2\alpha} \\ \pm 2\sqrt{-2\alpha} & 0 \end{bmatrix}$, todos estes pontos são pontos de sela pois

$\alpha < 0$. Conclui-se que apenas $(0,0)$ é um extremante da função, no caso de $\alpha < 0$, e é um minimizante local.

VI

$f(x + iy) = x^2 - y^2 + y + i2x\left(y - \frac{1}{2}\right)$, e a sua derivada é $f' = 2x + i(2y - 1)$.