



**INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO**  
**ANÁLISE MATEMÁTICA II**

Licenciatura MAEG

**Época Normal – 4 de Junho de 2015**

Duração: 2 horas

**I**

Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$  duas séries numéricas absolutamente convergentes.

**a) (2,0)** Mostre que, para todo  $x \in \mathfrak{R}$ , a série  $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx))$  é convergente.

**b) (1,0)** Sendo a função  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \text{sen}(nx)),$$

mostre que  $f$  é periódica.

**II**

Seja  $n \in \mathbb{N}$ , considere o subconjunto de  $\mathfrak{R}^n$

$$A = \{x \in \mathfrak{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

**a) (1,5)** Determine o interior, o exterior e a fronteira de  $A$ . Justifique se  $A$  pode ser um conjunto compacto.

**b) (2,5)** Seja  $M \subset \mathfrak{R}^n$ , e considere as funções  $f : M \rightarrow A$  e  $g : A \rightarrow \mathfrak{R}$ , a primeira sobrejectiva e a última contínua. Prove que a função  $g \circ f$  tem máximo e mínimo.

### III

Considere a função  $f : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida pela expressão

$$f(x, y) = \begin{cases} xy + k & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

- a) **(1,5)** Estude a existência da derivada direccional  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, y)$ , segundo um vector genérico não nulo  $u \in \mathfrak{R}^2$ , em função do valor real  $k$ .
- b) **(1,5)** Faça  $k = 0$ . O que pode afirmar sobre a diferenciabilidade de  $f$  nos pontos  $(0, y)$ , apenas com base no resultado obtido na alínea anterior?
- c) **(1,5)** Faça  $k = 1$ . Estude a diferenciabilidade de  $f$  nos pontos  $(0, y)$ .

### IV

**(2,5)** Considere a função  $f(x, y, z) = yze^x$  e seja  $g : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^3$  uma função de classe  $C^1$

tal que  $g(0,0) = (0,1,2)$  e  $D_g(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Calcule a derivada direccional

$D_v(f \circ g)(0,0)$  onde  $v = (1,2)$ , justificando convenientemente.

### V

a) **(1,5)** Estude a existência de extremantes para a função  $f(x, y) = \frac{x^2}{y} + 2x + \log y$ .

b) **(2,0)** Mostre, por definição, que  $(-1,1)$  é um ponto de sela da função.

### VI

**(2,5)** Considere a função complexa de variável complexa  $f = u + iv$  com  $v(x, y) = x^n + y^n$ , e  $n \in \mathbb{N}$ . Calcule os valores naturais de  $n$ , para os quais a função é holomorfa e determine-a. Calcule  $f'$  para os valores encontrados.

**fim**