Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II
Licenciatura MAEG
Época Normal - 4 de Junho de 2014
Duração: 2h

I

(2,5) Desenvolva em série de potências de $x-3$ a função $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, indicando o intervalo de convergência absoluta da série.

II

Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x-|x-y|}}{\log\left(x^2+y^2\right)}.$$

a) (1,5) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
b) (1,0) Determine analiticamente a fronteira e o derivado de D_f .
c) (0,5) Mostre que a sucessão $u_n=\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\in D_f$ e o seu limite não pertence a D_f .
d) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

1. (1,0) Estude a existência de prolongamento contínuo a $\mathbb{R}^2$ da função $f(x,y)=1+xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, e em caso afirmativo determine-o.
2. Considere a função $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y)=\begin{cases} x+y & \text{se } yx>0\\ 0 & \text{se } yx\leq 0\end{cases}.$$

a) (1,0) Calcule $\nabla g(0,0)$.
b) (1,5) Calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$, segundo qualquer vector não nulo $u\in\mathbb{R}^2$.
c) (2,0) Com base nas alíneas anteriores, que pode concluir quanto à diferenciabilidade da função g no ponto $(0,0)$? Justifique convenientemente.

IV

(2,0) Seja $w(r,s)$ uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Sejam $r = y - x$ e $s = y + x$ e $F(x,y) = w\left(r(x,y), s(x,y)\right)$. Mostre que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{\partial w}{\partial s}.$$

V

(2,5) Discuta em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ a existência de extremantes para a função

$$f(x,y) = x^4 + 2x^2y + \alpha x^2 + y^2.$$

VI

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u\,(x,y) = e^{(k-1)(x-y)} + x^2 - y^2$.

a) (1,0) Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais u é uma função harmónica.

b) (1,5) Faça $k = 1$. Determine a função inteira

$$f(z) = f\,(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$

tal que $f(0) = 0$.

c) (1,0) Determine $f\,'(1-i)$.

fim