**Instituto Superior de Economia e Gestão**

**ANÁLISE MATEMÁTICA II**
Licenciatura MAEG
**Época Normal** - 11 de Junho de 2013
Duração: 2h

## I

Considere a função $f$ cujo desenvolvimento em série de potências de $x-1$ é

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^{n+1}}{(n!)^2} (x-1)^n .$$

**a) (1,5)** Indique o intervalo de convergência da série.
**b) (1,5)** Calcule o valor de $f^{(280)}(1)$, justificando convenientemente.

## II

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{y-|y|} - \sqrt{-\log\left(x^2+y^2\right)}}{e^{\sqrt{|x|-y}}}.$$

**a) (1,5)** Determine o domínio $D_f$ da função $f$ e represente-o graficamente.
**b) (0,5)** Determine todos os valores de $\epsilon > 0$ para os quais seja verdadeira a frase, $D_f \subset B_\epsilon\left((0,0)\right)$, e traduza o seu significado.
**c) (1,0)** Dê exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a $D_f$ cujas componentes não sejam constantes e que convirja para um ponto que não pertença a $D_f$ .
**d) (1,0)** Com base nas alíneas anteriores justifique se $D_f$ pode ser um conjunto compacto.

## III

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} & \text{se } \; y \neq 1 \\ kx \quad \text{se } \; y = 1 \end{cases} .$$

**a) (1,5)** Discuta a continuidade da função $f$ nos pontos da forma $(a,1)$ com $a \in \mathbb{R}$, em função do parâmetro real $k$.

**b) (1,5)** Para que vectores não nulos $u \in \mathbb{R}^2$, é que a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,1)$ não depende do valor de $k$**?**

**c) (1,5)** Para $k = 1$, estude a diferenciabilidade da função $f$ no ponto $(0,1)$.

## IV

Considere a função

$$f(x,y) = \log\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - 2ay^2.$$

a) **(2,0)** Determine os pontos críticos de $f$ e classifique-os em função de $a \neq 0$.

b) **(1,5)** Justifique se a função tem extremantes no conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 1 \wedge y \geq x\right\}.$$

## V

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = y^2 - xy - x^2$, e seja $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, uma função inteira.

**a) (1,5)** Determine $f(z)$ tal que $f(i) = 1$.

**b) (1,0)** Determine $f\,'(i)$.

## VI

**(2,5)** Mostre que se $f$ e $\bar{f}$ são ambas funções inteiras, então $f$ é constante.

fim