

Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época de Recurso - 28 de Junho de 2012

Duração: 2h

I

(2,5) Justifique que a seguinte série é convergente e calcule a sua soma:

$$\sum_{n \geq 1} \left(\log \left(\frac{n}{2n+1} \right) - \log \left(\frac{n+2}{2n+5} \right) \right).$$

II

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y} + \sqrt{1-x^2-y^2}}{(|x|-|y|)\log(x/y)}.$$

- a) (1,5) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
b) (1,5) Dê exemplo de uma sucessão de pontos que pertença a D_f e que convirja para um ponto que não pertença a D_f .
c) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

1) Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2}{x^2+y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ k & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

- a) (1,5) Discuta a existência da derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$, segundo um vector genérico u , em função do parâmetro real k .
b) Faça $k = 0$.
b1) (1,5) Estude a diferenciabilidade da função f no ponto $(0, 0)$.
b2) (1,5) Estude a continuidade da função f no ponto $(0, 0)$.

2) (1,5) Utilize diferenciais para calcular um valor aproximado de

$$(2, 02)^2 + 1,97e^{2,02/1,97}.$$

IV

(2,5) Atenda à seguinte

Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Diz-se que uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma **Mudança de Coordenadas em U** se verificar as seguintes condições:

- i) h é de classe C^1
- ii) h é injectiva
- iii) $\det J_h(u) \neq 0 \quad \forall u \in U$.

Sabendo que as coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z) são definidas por

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta \quad z = z,$$

prove que a função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$ é uma mudança de coordenadas, com $U = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, 0 < \theta < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$.

V

(2,5) Averigue, em função do parâmetro α com $|\alpha| < 1$, a existência de extremantes para a função

$$f(x, y, z) = \alpha^2 e^{x^2} + (\alpha - 1)^2 e^{y^2} + (\alpha + 1)^2 e^{z^2},$$

classificando-os, em caso afirmativo. Justifique se existem extremos globais.

VI

Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = 2x + e^{-2y} \sin(2x)$.

a) (1,0) Mostre que u é uma função harmónica em \mathbb{R}^2 .

b) (1,5) Determine uma função f holomorfa em \mathbb{C} , tal que $\operatorname{Re} f = u$.

fim