

Instituto Superior de Economia e Gestão

ANÁLISE MATEMÁTICA II

Licenciatura MAEG

Época Normal - 30 de Maio de 2012

Duração: 2h

I

a) (1,0) Estude a natureza da série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{k \log \left(\frac{n}{k} \right)}{n+k} \right)^{2n}$, com $k > 0$.

b) (1,5) Desenvolva em série de potências de $x - a$ a função $f(x) = \frac{1}{e^{x-a}}$, com $a \in \mathbb{R}$, indicando o maior intervalo aberto onde esse desenvolvimento é válido.

II

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3 - |x^2 + y^2 - 1|} + \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2 - 3}}{\left| \log \left[(x - 2)^2 + y^2 - 4 \right] \right| + 7}.$$

- a) (2,0) Determine o domínio D_f da função f e represente-o graficamente.
b) (1,0) Determine analiticamente os seguintes conjuntos:
i) Pontos fronteiros ao conjunto D_f que pertencem a D_f .
ii) Pontos fronteiros ao conjunto D_f que não pertencem a D_f .
c) (1,0) Com base na alínea anterior justifique se D_f pode ser um conjunto compacto.

III

Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x + (m + 1)y & \text{se } x \neq y \\ 2m + x & \text{se } x = y \end{cases}.$$

- a) (1,5) Discuta a existência da derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial u}(1, 1)$, segundo um vector genérico u , em função do parâmetro real m .
b) **Faça** $m = 1$.
b1) (2,0) Estude a diferenciabilidade da função f no ponto $(1, 1)$.

b2) (1,5) Existirão vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para os quais $\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) \neq \nabla f(1,1) \cdot u$?

Em caso afirmativo, determine-os.

b3) (1,0) Com base nas alíneas anteriores, o que pode afirmar sobre a continuidade da função f no ponto $(1,1)$? Justifique convenientemente a resposta.

IV

(2,5) Considere as funções, $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $h(x,y) = (e^{x+y}, xy, \log(x^2 + 1))$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cuja matriz jacobiana no ponto $(1,0,0)$ é dada por $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz jacobiana de $f \circ h$ no ponto $(0,0)$.

V

(2,5) Averigue, em função do parâmetro $\alpha \neq 0$, a existência de extremantes para a função $f(x,y,z) = \alpha(x^2 + y^2) - \frac{e^{\alpha z^2}}{\alpha}$ e os respectivos valores extremos.

VI

(2,5) Considere uma função complexa de variável complexa não constante e inteira, $f(z)$. Mostre que as partes real e imaginária de f não podem ser iguais.

fim