

NOME _____
Número _____ Curso _____

MATEMÁTICA I - Época Especial - 02 de setembro de 2015 - Duração: 2 horas - - -

Grupo I

Escolha múltipla. Cotações: cada resposta certa +1.5; cada resposta errada -0.5; cada resposta não respondida ou anulada 0. **Nota:** um total negativo neste grupo vale 0 (zero) valores.

1. Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e com derivadas de todas as ordens em $]a, b[$. Seja $c \in]a, b[$. Qual das seguintes afirmações é **verdadeira**?

- (A) Se $f(a)$ e $f(b)$ têm o mesmo sinal, então f não se anula em $]a, b[$.
- (B) Se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$ então $f'(c) = 0$.
- (C) Se $f''(c) > 0$ então c é ponto de extremo local.
- (D) Se $f'(c) = 0$, $f''(c) = 0$ e $f'''(c) \neq 0$, então c não é ponto de extremo.

2. A área compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = 2x - 2$ e $g(x) = x^2 - 2$ é:

- (A) -4
- (B) $\frac{4}{3}$
- (C) $-\frac{4}{3}$
- (D) 4

3. Considere a função $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 4)}{(|x| - 3)\sqrt{x + 7}}$ e seja D_f o domínio de f . Então:

- (A) $D_f =]-7, +\infty[\setminus \{3\}$ e D_f é aberto.
- (B) $D_f = (]-7, -2[\setminus \{-3\}) \cup (]2, +\infty[\setminus \{3\})$ e D_f não é aberto nem fechado.
- (C) $D_f = (]-7, -2[\setminus \{-3\}) \cup (]2, +\infty[\setminus \{3\})$ e D_f é aberto.
- (D) $D_f =]-7, -2[\cup]2, +\infty[\setminus \{3\}$ e D_f é aberto.

4. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (kx)^n$. Sabendo que a série é convergente para $x = 5$, podemos concluir que

- (A) $k = 0$
- (B) $|k| > \frac{1}{5}$
- (C) $k = \frac{1}{5}$
- (D) $|k| < \frac{1}{5}$

5. Considere a matriz

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e seja C^T a matriz transposta de C . Então

- (A) $\det [C^T C] = 1$
- (B) $\det [C^T C] = 64$
- (C) $\det [C^T C] = 0$
- (D) $\det [C^T C] = 8$

Grupo II

(Cotações: 3.5 (=2.0+1.5); 4.0(=2.0+2.0); 3.0 (=1.5+1.5); 2.0

Apresente os cálculos que efectuar e justifique cuidadosamente a resolução das questões seguintes.

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x + 5z = -1 \\ x - 5y + 2\beta z = \alpha + 3 \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Classifique o sistema em função dos valores dos parâmetros α e β , indicando nos casos adequados o grau de indeterminação (ou o n^o de graus de liberdade).

(b) Considerando $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, resolva o sistema, indicando qual o respetivo conjunto solução (ou solução geral) e qual a solução geral do sistema homogéneo associado.

2. Considere a função $f(x) = \frac{-x^3}{x^2 - 4}$.

(a) Determine o domínio e estude a função quanto à existência de assíntotas.

(b) Estude a função quanto à monotonia, existência de pontos críticos (pontos de estacionaridade) e de extremos locais.

3. Determine:

(a) o polinómio de Taylor de grau 2 (ou a aproximação quadrática) da função $f(x) = x^{\frac{1}{7}}$, em torno do ponto 1, e aproveite o resultado para calcular um valor aproximado de $\sqrt[7]{1,1}$.

(b) o valor do integral $\int_{-\infty}^0 e^x \cos(x) dx$.

4. Considere a elasticidade de uma função positiva e diferenciável $g(x)$, relativamente à variável x , como sendo definida por

$$El_x [g(x)] = \frac{x}{g(x)} g'(x).$$

Considerando que $k \in \mathbb{R}$ é uma constante, prove que

$$El_x [(g(x))^k] = k El_x [g(x)]$$

e aproveite o resultado para calcular $El_x [(\ln(2 + x^2))^4]$.