Demonstração de que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$:

Suponhamos, com vista a um absurdo que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Então, por definição de número racional, existem $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ tal que $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, com $m.d.c(a, b) = 1$.

Logo $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$ e portanto $a^2 = 2b^2$; donde se conclui que 2 é um divisor de a^2 e logo (pense porquê *) 2 é também um divisor de a. Assim sendo, podemos afirmar que $a = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Pegando novamente na igualdade $\dfrac{a^2}{b^2} = 2$ e substituindo a por $2k$ obtemos $\dfrac{4k^2}{b^2} = 2$ ou seja $b^2 = 2k^2$ e portanto concluímos que 2 é um divisor de b^2. Pelo mesmo raciocínio que foi feito anteriormente vem que 2 é também um divisor de b.

Desta forma obtivemos que 2 é um divisor de a e de b e chegámos a um absurdo, uma vez que, por hipótese, $m.d.c(a, b) = 1$.

Logo $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ e está demonstrado o resultado.

Duas notas:

- Sobre (pense porquê *): lembre-se que aprendeu que todos os números naturais de decompõem de forma unica como produto de números primos;

  Assim, se $a = p_1^{k_1}.p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j}$, onde $p_1, p_2, \dots, p_j$ são os números primos que aparecem na decomposição de a teremos necessariamente que $a^2 = p_1^{2k_1}.p_2^{2k_2} \dots p_j^{2k_j}$; ou seja os números primos que aparecem na decomposição de a e a^2 são necessariamente os mesmos;

- O raciocinio utilizado na demonstração anterior serve igualmente para provar que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$, para todo o p número primo. Se quiser experimentar comece por adaptar a demonstração para provar que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.