Matemática I

Soluções – Álgebra Linear

1º semestre – 2015/16

1.2

$a)\sqrt{26}$; $b)\sqrt{6}$; $c)\sqrt{26}$; $d)\sqrt{26}$; $e)8$; $f)\sqrt{38}$

1.4

$a)(17,-18,3,-20)$; Coeficientes de u, v e w, respectivamente: 1, -2 e 4;
$b)(0,-\frac{11}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$; Coeficientes de u, v e w, respectivamente: -1, 0 e $\frac{1}{3}$;
$c)(-2\pi,0,\pi,6\pi)$; Coeficientes de u, v e w, respectivamente: 0, π e 0.

1.5

$a)$Linearmente dependentes; $b)$Linearmente independentes;
$c)$Linearmente dependentes; $d)$Linearmente independentes;
$e)$Linearmente independentes.

1.6

Se $\alpha = \frac{1}{2}$ os vectores são linearmente dependentes; Se $\alpha \neq \frac{1}{2}$ os vectores são linearmente independentes.

2.1

$a)$ $3A = \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$b)$ $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 9 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$c)$ Não está definida

$d)$ $4C - 2D = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -6 & 14 \\ -10 & 14 \end{bmatrix}$

$e)$ Não está definida.

$f)$ Não está definida.

$g)$ $(2A)(5C) = \begin{bmatrix} -130 & 140 \\ 110 & -60 \end{bmatrix}$

$h)$ Não está definida.

$i)$ $(AC)^2 = \begin{bmatrix} 323 & -266 \\ -209 & 190 \end{bmatrix}$

$j)$ $(2A - B)D = \begin{bmatrix} 27 & -35 \\ -4 & 26 \end{bmatrix}$

$k)$ $A^T A = \begin{bmatrix} 20 & -2 & -10 \\ -2 & 1 & 3 \\ -10 & 3 & 10 \end{bmatrix}$

$l)$ $BC = \begin{bmatrix} 14 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ e $CB = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 30 & -6 & 18 \\ -2 & -5 & 12 \end{bmatrix}$

2.2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & a & -7 & 8 \\ 2 & -7 & -1 & 6 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

2.3

$\alpha = 2$

2.4

$a)V; \quad b)F; \quad c)F; \quad d)V; \quad e)F.$

2.5

$a)n \times m; \quad b)n \times n; \quad c)m \times m.$

2.6

$a)r(M) = 1 \quad b)r(M) = 2 \quad c)r(M) = 2 \quad d)r(M) = 3 \quad e)r(M) = 2 \quad f)r(M) = 3.$

2.7

$a)$ Linearmente independentes; $b)$ Linearmente independentes;
$c)$ Linearmente dependentes.

2.8

$a)$ Se $x = -1 \vee x = 2$, então $r(M) = 2$.
Caso contrário (se $x \neq -1 \wedge x \neq 2$), $r(M) = 3$.

$b)$ Se $t = \pm 2 \vee t = -4$, então $r(M) = 2$.
Caso contrário (se $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4, -2, 2\}$), $r(M) = 3$.

$c)$ Se $z = 0 \wedge w = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$, então $r(M) = 2$.
Caso contrário (se $z \neq 0 \vee w \neq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$), $r(M) = 3$.

2.9

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} ; AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} ; r(AB) = 0 \neq r(BA) = 1$$

2.11

$a = -\frac{3}{4}$
$b = \frac{3}{4}$

2.12

$$a) \begin{bmatrix} -2 & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} \\ 3 & \frac{-4}{5} & -\frac{14}{5} \\ -1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{32} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} \frac{21}{34} & -\frac{2}{17} & \frac{11}{102} \\ -\frac{23}{34} & \frac{3}{17} & -\frac{25}{102} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.13

$b)\ X = A^2 - B^{-1}$

3.1

$|A| = |A^T| = -2; \quad |B| = |B^T| = -2; \quad |AB| = |A^T B^T| = 4;$

3.2

$a) - 8; \quad b)30; \quad c)0; \quad d) - abc; \quad e)abcd; \quad f)360; \quad g)4.$

3.4

$|C| = 0$

3.5

$a = \pm 2$

3.6

$|B| = 32 \neq 0$. Então B é invertível.

3.7

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2, 3\}$

3.8

$a)F :$ O determinante está definido apenas para matrizes quadradas

$b)V; \quad c)F; \quad d)V; \quad e)V; \quad f)F; \quad g)V.$

3.9

$a)4; \quad b)54; \quad c)\frac{1}{2}; \quad d)2^k; \quad e)16; \quad f)2.$

4.1

$a)F; \quad b)F; \quad c)V; \quad d)V.$

4.2

$a)$i. $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$; Sistema impossível. ii. Solução:$\emptyset$

$b)$i. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; Sistema possível e determinado. ii. Solução:$(0, 0, 0)$

$c)$i. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; Sistema possível e determinado. ii. Solução:$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

$d)$i. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$; Sistema possível e indeterminado, com 1 grau de liberdade.

ii. Conjunto soluçao:$\big\{(-\frac{1}{3}z, \frac{5}{3}z, z, 1), \quad z \in \mathbb{R}\big\}$

$e)$i. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; Sistema possível e indeterminado, com 1 grau de liberdade.

ii. Conjunto soluçao:$\big\{(\frac{1}{3} + w, \frac{1}{3} - w, -\frac{2}{3} - w, w), \quad \forall w \in \mathbb{R}\big\}$

$f)$i. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; Sistema possível e indeterminado, com 2 graus de liberdade.

ii. Conjunto soluçao:$\big\{(1 + \frac{2}{3}w, 1 + z - \frac{5}{3}w, z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{R}\big\}$

$g)$i. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$; Sistema possível e indeterminado com 2 graus de liberdade.

ii. Conjunto soluçao:$\{(3 - 3z - 3w, 2 - 2z - w, z, w), \quad \forall z, w \in \mathbb{R}\}$

4.3

a) $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix};$$

Se $a \neq 2$ o sistema é possivel e determinado; Se $a = 2$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

b) $$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ a^2\\ a^3\end{bmatrix};$$

Se $a = 0 \vee a = 1$ o sistema é possivel e determinado;
Se $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ o sistema é impossível.

c) $$\begin{bmatrix}a & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 2\\ 6\end{bmatrix};$$

Se $a = 1$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1;
Se $a \neq 1$ o sistema é possível e determinado.

d) $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ a\\ 2\end{bmatrix};$$

Se $b \neq 3$ o sistema é possível e determinado, para qualquer valor de a;
Se $b = 3 \wedge a = 1$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1;
Se $b = 3 \wedge a \neq 1$ o sistema é impossível.

e) $$\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b\\ 0\\ 2\end{bmatrix};$$

Se $a \neq 1$ o sistema é possível e determinado, para qualquer valor de b;
Se $a = 1 \wedge b = -2$ o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1;
Se $a = 1 \wedge b \neq -2$ o sistema é impossível.

f) $$\begin{bmatrix}0 & b & a\\ 0 & 1 & a\\ 1 & b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix};$$

Se $a = 0$ o sistema é impossível;
Se $a \neq 0 \wedge b = 1$ o sistema é impossível;
Se $a \neq 0 \wedge b \neq 1$ o sistema é possível e determinado.

4.4

A matriz simples do sistema é quadrada e invertível ($|A| = 19 \neq 0$);
A solução é $(1, -2, 2)$.

4.5

A matriz simples do sistema é quadrada e invertível ($|A| = -1 \neq 0$); $z = 5$.

4.6

A matriz do sistema é invertível, pelo que o mesmo admite solução única, qualquer que seja o segundo membro.
ii. Conjunto soluçao: $\left\{ \left(\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{10}b_2 - \frac{1}{5}b_3, \quad \frac{3}{10}b_2 - \frac{1}{2}b_1 + \frac{3}{5}b_3, \quad \frac{2}{5}b_3 - \frac{1}{2}b_1 + \frac{7}{10}b_2\right), \quad \forall b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \right\}$