Lista 2

7. Para encontrar (construir) uma bijeção entre os conjuntos $]0,1[$ e $\mathbb{R}$ que envolva a função $\tan(x)$ comece por notar que:

   - A função $\begin{array}{cccc} f_1: &]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \tan(x) \end{array}$ é uma bijeção (*visualize o seu gráfico; tente justificar porque é que é injectiva e porque é que é sobrejectiva; se não conseguir, peça-me ajuda;*)
   - A composição de 2 funções bijectivas é ainda uma função bijectiva;

     Tente provar! Se precisar de ajuda leia os 2 pontos abaixo mas, antes de os ler, tente sozinho(a)!

     - Sendo g e h funções injectivas prove que $g \circ h$ é ainda uma função injectiva;

       Sejam $a, b \in D_h$ tais que $(g \circ h)(a) = (g \circ h)(b)$, isto é, $g(h(a)) = g(h(b))$; como g é injectiva obtemos, da igualdade anterior, $h(a) = h(b)$ e, porque h também é injectiva vem $a = b$ e fica provado que $g \circ h$ é injectiva;
     - Sendo $g : A \to B$ e $h : C \to A$ funções sobrejectivas (isto é $g(A) = B$ e $h(C) = A$) prove que $g \circ h : C \to B$ é ainda uma função sobrejectiva;

       Basta notar que $(g \circ h)(C) = g(h(C)) = g(A) = B$, sendo as 2 ultimas igualdades justificadas pela sobrejectividade das funções h e g
   - Dos 2 pontos anteriores podemos concluir que para termos uma bijeção entre $]0,1[$ e $\mathbb{R}$ basta-nos então arranjar uma bijeção, f_2 entre $]0,1[$ e $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ e depois fazer a composição desta com a função f_1 definida no primeiro ponto atrás. A bijeção pretendida será $f_1 \circ f_2$;
     - Em geral, se quisermos uma bijeção entre 2 intervalos $[a_1,a_2]$, $a_1 \neq a_2$ e $[c_1,c_2]$ com $c_1 \neq c_2$ uma forma simples de obter é procurar uma função afim $f(x) = mx + b$, cujo gráfico (que como sabemos é uma recta) passe nos pontos (a_1,c_1) e (a_2,c_2). É fácil de verificar que é injectiva e, como a imagem do intervalo $[a_1,a_2]$ é o intervalo $[c_1,c_2]$ (*veja se percebe porquê! faça o gráfico se necessário!*) a função é uma bijeção entre os 2 intervalos. *Note que esta é apenas uma das muitas bijeções que pode construir entre 2 intervalos;*
     - Assim, para obtermos a função que nos falta basta procurar a função $f_2(x) = mx + b$ tal que $f_2(0) = -\pi/2$ e $f_2(1) = \pi/2$; obtemos as equações $-\pi/2 = b$ e $\pi/2 = m + b$, isto é, $m = \pi$.

       A função $\begin{array}{cccc} f_2: &]0,1[& \to &]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & x & \to & \pi x - \pi/2 \end{array}$ é uma bijeção entre $]0,1[$ e $]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
   - Uma (*poderia ter construído outras*) bijeção entre os conjuntos $]0,1[$ e $\mathbb{R}$ é então a função $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f_1 \circ f_2(x) = \tan(\pi x - \pi/2), \quad \forall x \in]0,1[.$$