Lista 3

6. Comece por verificar que $ext(X) = int(\mathbb{R}\backslash X)$ e $fr(X) = fr(\mathbb{R}\backslash X)$, qualquer que seja $X \subseteq \mathbb{R}$ (**justifique!** para tal basta escrever com cuidado as definições dos conjuntos envolvidos).
   Agora: $A\, aberto \Leftrightarrow A = int(A) \Leftrightarrow \mathbb{R}\backslash A = \mathbb{R}\backslash int(A)$. Como $\mathbb{R} = int(X) \bigcup fr(X) \bigcup ext(X)$ obtemos, das igualdades e equivalências anteriores, $A\, aberto \Leftrightarrow \mathbb{R}\backslash A = ext(A) \cup fr(A) \Leftrightarrow \mathbb{R}\backslash A = int(\mathbb{R}\backslash A) \cup fr(\mathbb{R}\backslash A) \Leftrightarrow \mathbb{R}\backslash A\, fechado$, como queriamos demonstrar.

8. Comece por provar que, dado $X \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e majorado, $s = sup(X) \in fr(X)$. Para tal, suponhamos, com vista a um absurdo, que $s = sup(X) \notin fr(X)$. Assim, temos que ter $s \in int(X)$ ou $s \in ext(X)$.
   Se $s \in int(X)$ então, por definição de ponto interior, existe $\epsilon > 0$ tal que $]s-\epsilon, s+\epsilon[\subseteq X$. Em particular, $s + \epsilon/2 \in X$, o que é um absurdo, visto s ser o supremo (e portanto, **um majorante**) do conjunto X. Logo, $s \notin int(X)$.
   Se $s \in ext(X)$ então, por definição de ponto exterior, existe $\epsilon > 0$ tal que $]s - \epsilon, s + \epsilon[\subseteq \mathbb{R}\backslash X$. Como, qualquer que seja $x \in X$, $x \leq s$ e, $]s-\epsilon, s[\subseteq \mathbb{R}\backslash X$ então, $s-\epsilon/2 \geq x$, para todo $x \in X$; o que é um absurdo, visto s ser o supremo (e portanto, **o menor dos** majorante) do conjunto X. Logo, $s \notin ext(X)$.
   Portanto, $sup(X) \in fr(X)$.
   Assim, se X é um conjunto aberto temos que $X = int(X)$; como $sup(X) \in fr(X)$ (e $int(X) \cap fr(X) = \emptyset$) então $sup(X) \notin X$ e logo X não tem máximo.
   Analogamente se provava para o mínimo.

9. Prova-se facilmente que se $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$ então $fr(X) = \emptyset$.
   Resta-nos assim provar que $fr(X) = \emptyset \Rightarrow (X = \emptyset\, ou\, X = \mathbb{R})$.
   Suponhamos, com vista a um absurdo, que existe $X \subseteq \mathbb{R}$, tal que $fr(X) = \emptyset$ e $X \neq \emptyset$ e $X \neq \mathbb{R}$.
   Se $X \neq \emptyset$ então existe $x \in X$; Se $X \neq \mathbb{R}$ então existe $y \notin X$.
   Como $fr(X) = \emptyset$ então X é um conjunto aberto (portanto todo o elemento de X é também um elemento de $intX$) e logo existe $\epsilon > 0$ tal que $V_\epsilon(x) =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subseteq X$.
   Suponhamos, s.p.d.g., que $x < y$ e consideremos o conjunto $W = \{\delta > 0 :]x, x + \delta[\subseteq X\}$.
   W é um conjunto não vazio (pq $\epsilon \in W$) e é majorado (pq todo $\delta > d(x, y)$ já não pertence a W e é majorante de W). Logo, pelo axioma do supremo, W tem supremo (chamemos-lhe s).
   Pensemos agora no elemento $x + s$; este tem q ser um elemento na fronteira de X (**justifique!**; se $x + s \in int(X)$ então...$_{absurdo}$; se $x + s \in ext(X)$ então ...$_{absurdo}$), o q é absurdo visto q esta é vazia. Assim, fica provado o pretendido.