Lista 6

6. Para que a função f seja diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ tem que existir e ser finita $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$;

Da forma com a função f está definida para que exista este limite têm que existir e ser iguais $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Assim, comecemos por considerar $a \in \mathbb{Q}$; logo $f(a) = a^2 + 1$. Temos $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2+1-(a^2+1)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a$

e $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{2x-(a^2+1)}{x-a} = \frac{2a-a^2-1}{0} = \begin{cases} \infty & \text{se } 2a - a^2 - 1 \neq 0, \text{ isto é, } a \neq 1 \\ 0/0 & \text{se } a = 1 \end{cases}$

Assim, o 2º limite só pode existir se $a = 1$ e nesse caso, vale $\lim_{x \to a} \frac{2x-(a^2+1)}{x-a} = \lim_{x \to 1} \frac{2x-2}{x-1} = 2$.

Logo se $a \in \mathbb{Q}$, só existe $f'(a)$ para $a = 1$.

Considerando agora $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$; vem $f(a) = 2a$. e, seguindo o raciocínio anterior temos $\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{x^2+1-2a}{x-a} = \frac{a^2+1-2a}{0} = \begin{cases} \infty & \text{se } a^2 + 1 - 2a \neq 0, \text{ isto é, } a \neq 1 \\ 0/0 & \text{se } a = 1 \end{cases}$

Como agora $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ concluímos que o limite anterior não é finito, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ e logo $\nexists a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ para o qual f seja diferenciável em a;

Assim, f é diferenciável em $a \in \mathbb{R}$ sse $a = 1$;

Nota: o exercício poderia igualmente ter sido resolvido comçando por ver para que valores de a a função é contínua (porque para ser diferenciável terá que ser também contínua); obteriamos que f só é contínua para $a = 1$ e logo só para estwe valor é que teriamos q estudar a diferenciabilidade;