Lista 6

3. Como g é uma função contínua e $[0,1]$ é um conjunto compacto, sabemos (ver resultados sobre funções contínuas dados na aula) que $g([0,1])$ é um conjunto compacto e portanto limitado e fechado.

   Observação: $g([0,1]) = \{g(x) : x \in [0,1]\}$;

3.a) Suponhamos, com vista a um absurdo que existia (x_n) sucessão em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$.

Como (x_n) é uma sucessão em $[0,1]$ então $g(x_n) = n \in g([0,1])$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mas $g(x_n) = n \to +\infty$ e $g([0,1])$ é, como vimos atrás, um conjunto limitado. Chegamos assim a um absurdo. Logo, não existe (x_n) sucessão em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$.

3.b) Seja (x_n) sucessão em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$. Obtemos então que $\frac{1}{n} \in g([0,1])$, que é, conforme vimos atrás um conjunto fechado. Se $g([0,1])$ é um conjunto fechado sabemos (ver resultado dado na aula) que, qualquer que seja a sucessão convergente $(a_n) \subseteq g([0,1])$ $\lim a_n \in g([0,1])$. Logo, aplicando o resultado à sucessão $g(x_n) = \frac{1}{n}$ obtemos que $\lim \frac{1}{n} = 0 \in g([0,1])$.

Por definição de $g([0,1])$ (ver observação acima, se necessário), se $0 \in g([0,1])$ então $0 = g(c)$, para algum $c \in [0,1]$; isto é, existe $c \in [0,1]$ tal que $g(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

9.b) Existe $\theta'(x)$, para todo $x \neq 0$ (basta usar as regras de derivação);

Para que θ seja diferenciável em todo $\mathbb{R}$ resta-nos ver o que acontece para $x = 0$:

Por um lado temos $\theta'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\theta(x)-\theta(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(a+bx)-a}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b$;

Por outro lado

$\theta'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\theta(x)-\theta(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(1/x)-a}{x}$; como $\lim_{x\to 0^+} \arctan(1/x) = \pi/2$ o limite anterior só é finito no caso de termos $a = \pi/2$ (caso contrário, o limite daria $\frac{(k\neq 0)}{0}$ e portanto ∞ e logo não existiria $\theta'(0+)$; **assim, concluímos já que temos que ter** $a = \pi/2$ (note que teria chegado ao mesmo resultado se tivesse começado por estudar a continuidade da função); Assim, e supondo desde já que $a = \pi/2$ obtemos

$\theta'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(1/x)-\pi/2}{x} =_{R.C}^{\frac{0}{0}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1/(x^2)}{1+(1/x)^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{x^2+1} = -1$;

E portanto, para que existam e sejam iguais $\theta'(0^-)$ e $\theta'(0^+)$ temos que ter $a = \pi/2$ e $b = -1$;

9.c) Para os valores de a e b encontrados na alínea anterior temos: $\theta'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{-1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Observação: note que $(\arctan(1/x))' = \frac{(1/x)'}{1+(1/x)^2} = \ldots = \frac{-1}{x^2+1}$

Agora sabemos que $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ se θ' for uma função contínua em $\mathbb{R}$; Como $\lim_{x\to 0^+} \theta'(x) = \lim_{x\to 0^-} \theta'(x) = \theta'(0)$ concluímos que θ' é contínua em todo o $\mathbb{R}$ e portanto que $\theta \in C^1(\mathbb{R})$;