



Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assimptóticas

Consistência

Normalidade
assimptótica

Eficiência
assimptótica



LISBOA
SCHOOL OF
ECONOMICS &
MANAGEMENT

Estadística II

1º Sem. 2015/2016

Lic. Economia e Finanças



Propriedades assintóticas do estimador OLS

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

- 1 Consistência
- 2 Normalidade assintótica
- 3 Eficiência assintótica



Propriedades assintóticas do estimador OLS

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

- Nos dois capítulos anteriores estudámos as propriedades exactas do OLS.
- Dadas as hipóteses, estas propriedades são válidas para qualquer $n \geq k$.
- Agora vamos ver o que se passa quando $n \rightarrow \infty$.



Consistência do OLS:

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assimptóticas

Consistência

Normalidade
assimptótica

Eficiência
assimptótica

- Lembrando que:

$$\hat{\beta} = (x'x)^{-1} x'y = \beta + (x'x)^{-1} x'u$$

$$P \lim (\hat{\beta}) = \beta + P \lim \left(\frac{1}{n} x'x \right)^{-1} P \lim \left(\frac{1}{n} x'u \right)$$

- Assumindo que $P \lim \left(\frac{1}{n} x'x \right) = Q$ (definida positiva), então

$$P \lim (\hat{\beta}) = \beta + Q^{-1} P \lim \left(\frac{1}{n} x'u \right).$$



Consistência do OLS:

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

- Agora temos que determinar $P \lim \left(\frac{1}{n} x' u \right)$

$$E \left(\frac{1}{n} x' u \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var} \left(\frac{1}{n} x' u \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{n^2} x' u' u x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n} \left(\frac{1}{n} x' x \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2 Q}{n} = 0 \end{aligned}$$

- Pelo que $P \lim \left(\frac{1}{n} x' u \right) = 0$ e $P \lim \left(\hat{\beta} \right) = \beta$.



Normalidade assintótica

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

- Por vezes a hipótese MLR.6 : $y|X \sim N(X\beta, \sigma^2 I)$ é demasiado forte. Por exemplo:
 - y é uma variável de contagem que toma poucos valores, como “número de peças de fruta comidas diariamente”
 - y uma variável que só assume valores positivos, como “salário” ou “despesa”
- Para amostras grandes é possível fazer inferência recorrendo aos teoremas limite que justificam a normalidade assintótica das estatísticas habituais.



Normalidade assintótica

Estatística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

Teorema 5: Dadas as hipóteses do teorema de Gauss-Markov (MLR.1 – MLR.5), tem-se:

$$(i) \quad \sqrt{n} (\hat{\beta} - \beta) \stackrel{a}{\sim} N(0, \sigma^2 Q^{-1})$$

$$(ii) \quad P \lim (\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

$$(iii) \quad \frac{(\hat{\beta}_j - \beta_j)}{se(\hat{\beta}_j)} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

- Desde que a amostra seja suficientemente grande e estando verificadas as hipóteses MLR.1 – MLR.5, toda a inferência estudada anteriormente é aproximadamente válida mesmo que os erros não sejam normais.



Eficiência assintótica

Estadística II
1º Sem.
2015/2016

Lic.
Economia e
Finanças

Propriedades
assintóticas

Consistência

Normalidade
assintótica

Eficiência
assintótica

- O teorema de Gauss-Markov pode ser “adaptado” para o caso da inferência assintótica.
- O que se pode provar é que dadas as hipóteses MLR.1 – MLR.5 o estimador OLS é o mais eficiente na classe dos estimadores lineares e consistentes.