Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2014/2015
Época Normal: 9 de Janeiro de 2015
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,5) 1. Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \dfrac{(2x-1)^2}{x^2-5x+6} < 0 \right\}$ e $B = \left\{ \cos(n\pi) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$

(a) Escreva o conjunto A como intervalo ou união de intervalos.

(b) Indique o máximo e o mínimo, caso existam, do conjunto B.

(c) Calcule a fronteira de B, a fronteira de $A \cap \mathbb{Q}$ e o conjunto dos pontos de acumulação de A.

(d) Indique, justificando, o valor lógico das seguintes proposições:

i. $\forall a \in A\ \exists \epsilon > 0 :]a-\epsilon, a+\epsilon[\subseteq A$;

ii. $\exists x \in B :\ b \leq x,\ \forall\, b \in B$;

(4,0) 2. (a) Calcule o valor de k de forma a que $\lim \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{k^n (2n)!}} = 1$.

(b) Determine a função real de variável real f que verifica $f(\pi) = 2$ e $f'(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

(4,5) 3. Dado $k \in \mathbb{R}$ considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_0^{2x} (e^t - 1)dt}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x^k \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Determine, caso existam, os valores de k para os quais se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Considere $k = 0$ e indique, justificando,

i. se f é diferenciável em $x = 0$;

ii. o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} f\left(\dfrac{-n^2}{n^2+1}\right)$;

iii. o valor lógico da seguinte proposição: sendo $g(x) = xf(x)$,
$\forall x, y \in \mathbb{R}^-\ \ x \geq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$;

(2,0) 4. Seja f uma função real de variável real, diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e sejam $a, b \in \mathbb{R}^+$ tais que $\dfrac{f(a)}{a^2} = \dfrac{f(b)}{b^2}$. Mostre que a equação $xf'(x) = 2f(x)$ tem, pelo menos, uma solução em $\mathbb{R}^+$.

(2,5) 5. Dado $\alpha > 0$, estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^3 \frac{(e^x - 1)\ln\left(1 + \sqrt[5]{x^2}\right)}{\sqrt[3]{9x^\alpha - x^{2+\alpha}}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $0 < f(x) \leq 1$, para todo $x \geq 0$ e considere a função $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t^2+1} dt.$$

Prove que o contradomínio de g é um **intervalo** da forma $[0, k[$, para algum $0 < k \leq \frac{\pi}{2}$.