Proposta de resolução do teste de 2 de Novembro de 2015

1. (a) Começando por resolver á equação $|x^2-2x|<1$, temos

$$\begin{array}{lll} x^2-2x<1 & \wedge & x^2-2x>-1 \Leftrightarrow \\ x^2-2x-1<0 & \wedge & x^2-2x+1>0 \Leftrightarrow \\ x \in]1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}[& \wedge & x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \Leftrightarrow \\ & & x\in]1-\sqrt{2},1[\cup]1,1+\sqrt{2}[\end{array}$$

Assim $A=]1-\sqrt{2},1[\cup]1,1+\sqrt{2}[$;

(b) $\frac{1}{n^2}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\begin{cases}\frac{1}{n^2}-1 & \text{se n é ímpar}\\ \frac{1}{n^2}+1 & \text{se n é par}\end{cases}$

Desta forma, temos que $MajB=[5/4,+\infty[$, supremo B= máximo B=5/4; $MinB=]-\infty,-1]$; ínfimo=-1 e não existe mínimo;

(c) $int(A\cap\mathbb{Q})=\emptyset$; $fr(A\cap\mathbb{Q})=[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$; $B'=\{-1,1\}$;

(d)i. Proposição verdadeira (a proposição afirma que o conjunto B tem máximo;)

(d)ii. Proposição verdadeira (a proposição afirma que todos os elementos de A têm uma vizinhança contida no conjunto A; isto é, afirma que todo o elemento de A pertence ao interior de A; ou seja que o conjunto A é um conjunto aberto)

2. Uma vez que temos uma soma com "n" parcelas e que o limite de cada uma das parcelas é 0 (quando $n\to+\infty$, naturalmente) vamos utilizar o teorema das sucessões enquadradas para calcular o limite pedido.

Sendo $\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}$ a maior das n parcelas (uma vez que tem o menor denominador) e $\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}$ a menor delas, podemos afirmar que

$$\underbrace{\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}+\ldots+\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}}_{n.\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}}\le\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}+\ldots+\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}\le\underbrace{\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}+\cdots+\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}}_{n.\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^1}}},$$

Logo

$$\frac{n.\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}\le\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}+\ldots+\frac{\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}\le\frac{n.\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}$$

Como $\lim\frac{n.\cos^2 n}{\sqrt{n^4+n^2}}=\lim\cos^2 n.\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}=0$ (por se tratar de um produto de um infinitésimo, $\frac{n}{\sqrt{n^4+n^2}}$, por uma sucessão limitada $\cos^2 n$) e $\lim\frac{n.\cos^2 n}{\sqrt{n^4+1^2}}=0$ (pelo mesma razão), concluímos, pelo teorema das sucessões enquadradas, que o limite pedido é 0;

3.
- Para $n=1$ temos $(-1)^0.1^2=\frac{(-1)^0.1.2}{2}$, isto é, $1=1$, P.V;
- Vamos agora provar que, se o resultado fôr válido para um certo natural p então também tem que ser para $(p+1)$:

  Hipótese de indução: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(-1)^{p-1}p(p+1)}{2}$;

  Tese: $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-1}k^2=\frac{(-1)^{p+1-1}(p+1)(p+2)}{2}$;

  Como:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{k-1}k^2 \quad & \underbrace{=}_{prop.assoc} \quad \sum_{k=0}^{p}(-1)^{k-1}k^2 + (-1)^p(p+1)^2 \\
& \underbrace{=}_{Hip.ind.} \quad \tfrac{(-1)^{p-1}p(p+1)}{2} + (-1)^p(p+1)^2 \\
& = \quad \frac{(-1)^{p-1}p(p+1) + 2(-1)^p(p+1)^2}{2} \\
& = \quad \frac{(-1)^p(p+1)\left((-1)^{-1}p + 2(p+1)\right)}{2} \\
& = \quad \frac{(-1)^p(p+1)\left(-p + 2p + 2)\right)}{2} \\
& = \quad \frac{(-1)^p(p+1)(p+2)}{2}\, c.q.d.;
\end{aligned}
$$

4. (a) Sabendo que a função é contínua em $x = 1$ temos que existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ e é igual a $f(1)$. Logo temos que ter $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$. Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (\arccos(x) + k) = \arccos(1) + k = 0 + k = k = f(1)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \pi/4$ concluímos que $k = \pi/4$;

   (b) Como e^{x+1} é uma função crecente e $\lim_{x\to -\infty} e^{x+1} = 0$ e $e^{-1+1} = 1$ obtemos que $f]-\infty,-1[=]0,1[$; Como $\arccos x$ varia entre 0 e π quando $x \in [-1,1]$, obtemos que $f[-1,1] = [0+\pi/4, \pi+\pi/4] = [\pi/4, 5\pi/4]$;

   (c) A proposição afirma que a função f é injectiva. Uma vez que, pela alínea anterior, sabemos já que $f]-\infty,-1[\cap f[-1,1] \neq \emptyset$ podemos afirmar que a função não é injectiva.