ISEG **ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia-Finanças, 1º semestre, Exame Época Normal** **04. 01. 2016**

1ª Parte - Teórica – 30 minutos

Cotação da 1º Parte: 7 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome:____**Número:**__________

Formulário. Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \varnothing$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\mathrm{Var}(X) = E[(X-\mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$; $\mathrm{Cov}(X,Y) = E\{(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$;

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$\mathrm{E}(aX+bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\mathrm{Var}(aX+bY) = a^2\mathrm{Var}(X) + b^2\mathrm{Var}(Y) + 2ab\,\mathrm{Cov}(X,Y)$; $E(Y) = E_X\left[E(Y \mid X)\right]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X{}^{(r)}(0)$

$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$; $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \overline{X}^2$; $S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2 = n\,S^2$

$X \sim \chi^2_{(n)}$ então $E(X) = n$; $\mathrm{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}, s < \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = \sqrt{8/n}$; $\gamma_2 = 3 + 12/n$

[**Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale –2,5.** A classificação desta questão variará entre um mínimo de *zero* e um máximo de *10*]

Indique as respostas verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**), *assinalando com **X** na quadrícula respectiva*

1. Seja $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ uma partição de Ω, com $P(A_i) > 0$, $i = 1,\ldots,4$, e B e C dois acontecimentos de Ω:

	V	F
$P(B) = P(B \mid A_1) \times P(\overline{A}_1) + P(B \mid \overline{A}_1) \times P(A_1)$.		
Sejam B e C acontecimentos com probabilidade positiva e $C \subset B$. Então $\mathrm{P}(C \mid B) = 1$.		
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.		
Os acontecimentos A_1, …, A_4 são incompatíveis.		

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$, f.d.p ou f.p. *f(x)* e $a \in \Re$.

	V	F
Toda a variável aleatória discreta tem valor esperado $E(X)$.		
Se X é uma variável aleatória discreta então $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.		
$F(x)$ tem domínio em $\Re$ e contradomínio em [0;1].		
Se X for contínua com $f(x) > 0$ para $x > 0$ e fizer $Y = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1 & X > 0 \end{cases}$, então Y é uma variável aleatória mista.		

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias com média e variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$ e função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x,y)$ e respectivas f.d.p $f_{X,Y}(x,y)$.

	V	F
$\left(X - \mu_X\right) / \sigma_X$ tem média nula e variância unitária.		
Se X tiver distribuição de Poisson e usarmos o teorema do limite central para calcularmos probabilidades aproximadas (sobre *X*) não se deve usar a correção de continuidade.		
μ_X coincide com a mediana se $f_X(x)$ for simétrica.		
Existindo $E(XY)$ e se X e Y forem independentes, então $E(XY) = E(X)E(Y)$.		

4. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n), n > 2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X com média μ e variância σ^2. Considere ainda a média e variância amostrais, respectivamente $\bar{X}$ e S^2:

	V	**F**
As variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são i.i.d.		
A distribuição da amostra é igual à distribuição por amostragem da estatística $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.		
A média da amostra coincide com a média do universo.		
$\lim_{n\to\infty} Var(\bar{X}) = 0$.		

<u>**Atenção**</u>**: Das seguintes 3 questões responda apenas a 2 (Resposta a 3 questões anula 2) [Cotação: 15+15].**

5. Sejam A, B acontecimentos do espaço de resultados Ω. Recorrendo aos axiomas da teoria da probabilidade e à propriedade $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$, **demonstre** que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**

6. Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ uma amostra casual de um universo X com função de distribuição $F_X(x)$. Seja ainda $T = \max\{X_i\}$. Deduza a função de distribuição de T em função de F_X. **[Cotação: 15]**

7. Sejam X uma variável aleatória contínua e

$$\forall x, h \in R, \quad \lim P(x < X \leq x + h) = 0 \text{ quando } h \to 0^+, \ h > 0.$$

Argumente sobre a veracidade da afirmação. **[Cotação: 15]**

Nome:____**Número:**_________

Espaço reservado para classificações

1.a) (10)	**2 a) (20)**	**3.a) (10)**	**4 a) (10)**	**T:**
1.b) (20)	**2 b) (20)**	**3.b) (20)**	**4 b) (20)**	**P:**

Nota: Resposta errada nas perguntas de resposta múltipla **desconta 2,5**

1. Uma companhia de seguros estima que 30% de **todos** os acidentes de automóvel são, em parte causados por más condições atmosféricas e 20% envolvem danos corporais. Adicionalmente, dos acidentes que envolvem danos corporais, 40% foram em parte causados por más condições atmosféricas.

a) Em 20 acidentes de automóvel calcule a probabilidade de menos de 5 terem sido causados por más condições atmosféricas? (*Assinale com uma **cruz** no quadrado adequado*)

0.4164 ☐ 0.2375 ☐ 0.1304 ☐ 0.1789 ☐

b) Se num acidente escolhido ao acaso, as causas foram, em parte, as más condições atmosféricas calcule a probabilidade de que tenham ocorrido danos corporais?

.

2. Seja $f_X(x)$ função densidade de probabilidade da variável aleatória X.

$$f_X(x) = 1 - \frac{x}{2} \qquad (0 < x < 2).$$

a) Seja a variável aleatória $Y = \begin{cases} -1 & 0 < X < 1 \\ 1 & 1 \leq X < 2 \end{cases}$. Determine a função distribuição da variável aleatória Y**.** Classifique-a. **Formalize adequadamente a sua resposta**.

b) Seja $W = X/3 + 1$. Determine a variância da variável aleatória W**.**

3. Uma certa loja abre diariamente para atendimento ao público entre as 10 e as 18 horas. O número de clientes atendidos por hora, segue um processo de Poisson com taxa média igual a quatro.

a) Qual a probabilidade de serem atendidos até 6 clientes nas 1ªs três horas.

0.0458 ☐ 0.0255 ☐ 0.0203 ☐ 0.0127 ☐

b) Determine a probabilidade de um cliente que está em 6º lugar na fila ter de esperar mais de 1 hora para começar a ser atendido?

4. Durante o período de férias o montante diário (em euros) gasto pelas famílias de uma região é uma variável aleatória que pode ser representada por uma distribuição normal, de média 80 e variância 100.

a) Qual o montante diário máximo que uma família gasta com uma probabilidade de 97.5%?

99,60 ☐ 60,40 ☐ 96,45 ☐ 63,55 ☐

b) Seleccionada uma amostra de 64 famílias dessa região determine a probabilidade de o desvio entre a média da amostra e da população ser, em valor absoluto, inferior a 2,5 euros.