

Cotação da 1º Parte: 8 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: _____ Número: _____

Formulário

Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$;

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab\text{Cov}(X, Y)$; $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$
; $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} - \bar{X}^2$; $S'^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$; $(n-1)S'^2 = n S^2$

$X \sim \chi_{(n)}^2$ então $E(X) = n$; $\text{Var}(X) = 2n$; $M_X(s) = (1-2s)^{-n/2}$, $s < \frac{1}{2}$; $\gamma_1 = \sqrt{8/n}$; $\gamma_2 = 3 + 12/n$

[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva

1. Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de Ω , com $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$, e B e C dois acontecimentos de Ω :

	V	F
$P(B) = P(A_1 B) \cdot P(A_1) + P(A_2 B) \cdot P(A_2) + P(A_3 B) \cdot P(A_3)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sejam B e C acontecimentos com probabilidade positiva e $C \perp B$. Então $P(C B) = 1$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$P[(C \cap B) \cup (C \cap \bar{B})] = P(C)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Os acontecimentos A_1 , A_2 e A_3 são independentes.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

2. Seja X uma variável aleatória com função de distribuição $F(x)$, f.d.p ou f.p. $f(x)$ e $a, b \in \mathfrak{R}$.

	V	F
Se X for discreta, $P(X \in [a, b]) = F(b) - F(a)$, $a < b$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se X é uma variável aleatória contínua então $P(b < X < a) = F_X(b) - F_X(a)$, $a > b$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se X for variável aleatória mista, então $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Se X for contínua com densidade positiva para $x > 0$ apenas, e fizer $Y = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ X & X > 0 \end{cases}$, então Y é uma variável aleatória contínua.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

3. Seja X uma variável aleatória com $E(X) = \mu$ e $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

	V	F
$(X - \mu) / \sigma$ tem distribuição $N(0;1)$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
A existência de variância implica a existência do coeficiente de assimetria.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Sejam, X contínua,, ξ_α o quantil de ordem α e $\text{Pr}(X > \xi_\alpha) = 1/2$. Então ξ_α é a mediana.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\text{Var}(-X) = -\sigma^2$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

4. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função distribuição conjunta $F_{X,Y}(x, y)$:

	V	F
Se $Cov(X, Y) = 0$ então garante-se que X e Y são independentes se e só se $F_{X,Y}(x, y)$ for contínua.		
Se $E(XY) = E(X)E(Y)$ então X e Y são independentes.		
Se $F_{X,Y}(x, y)$ for discreta, $P(a < X < b; c < Y < d) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$, $a < b; c < d$.		
Seja $F_{X,Y}(x, y)$ contínua e considere as respectivas funções de densidade conjunta, marginais e condicionadas. A função densidade conjunta $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \times f_{Y X}(y) = f_Y(y) \times f_{X Y}(x)$.		

5. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n), n \geq 2$, uma amostra casual simples retirada de uma população X com média μ e variância σ^2 . Considere ainda a média e variância amostrais, respectivamente \bar{X} e S^2 :

	V	F
A amostra (X_1, X_2, \dots, X_n) é uma estatística.		
A Aproximação assintótica $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ só é válida se a população for normal.		
A variância da amostra coincide em média com a variância do universo.		
$(\bar{X} - \mu) / \sigma$ é uma estatística se μ e σ^2 forem conhecidos.		

6. Sejam X uma variável aleatória contínua e

$$\forall x, h \in R, P(x + h < X \leq x) = 0 \text{ quando } h \rightarrow 0^-, h < 0.$$

Argumente sobre a veracidade da afirmação.

[Cotação: 15]

7. Seja (X_1, X_2, \dots, X_n) uma amostra casual de um universo X com função de distribuição $F_X(x)$. Seja ainda $T = \min\{X_i\}$. Obtenha a função de distribuição de T em função de F_X . [Cotação: 15]



Nome: _____ Número: _____

Espaço reservado para classificações

1a.(15)	2a.(10)	3a.(20)	4a.(20)	T:		
1b.(10)		2b.(20)	3b. (15)		4b.(10)	P:

1. O João vai para o ISEG num dos seguintes transportes: Autocarro (25% das vezes) , Metro (35% das vezes) ou Bicicleta (40% das vezes). Nos dias em que chove o João vai de Metro ou Autocarro com igual probabilidade e **nunca** vai de bicicleta.(Admita que num dia ou faz sol ou chove)

a) Qual a percentagem de dias com Sol?

b) Em 10 dias úteis qual a probabilidade de o João ir de bicicleta em mais de metade dos dias?

2. Admita que durante época de exames, o número de exercícios estatística que um aluno faz por hora de estudo segue um processo de Poisson com taxa média de 1,5 .

a) Qual a probabilidade de em 7 horas de estudo o aluno ter feito mais de 12 exercícios?

b) Qual a probabilidade de o aluno demorar mais do que 2 horas e 30 minutos a fazer 3 exercícios de estatística?

3. Considere a seguinte variável aleatória bidimensional com densidade $f_{X,Y}(x,y)$ dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = 6x^3\sqrt{y} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

a) Calcule $P(|X|>0.2)$

b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes ? Determine o valor esperado de Y quando $X=0,5$. Justifique.

4. O valor gasto em compras de Natal pelas famílias de um dado País pode ser bem aproximado por uma distribuição normal. Sabe-se que na região "A" a média da população é de 1,65 e o desvio padrão 0.9 (em centenas de euros) e na região "B" a média é de 1,45 e o desvio padrão 1.1 (em centenas de euros).

a) Seleccionadas aleatoriamente 8 famílias da região A e 6 da região B, qual a probabilidade de se concluir que em média as famílias da região B gastam mais em compras de Natal?

b) Qual a probabilidade de 10 famílias da região A gastarem **no total** mais de 1850 euros?