

Cotação da 1ª Parte: 3,5 Valores. As respostas são efectuadas no espaço a seguir disponível. A cotação das perguntas de Verdadeiro e Falso é feita sempre da mesma maneira. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Não pode utilizar calculadora nem qualquer meio de consulta. BOA SORTE!

Nome: _____ Número: _____

Formulário. Axiomática: P1. $P(A) \geq 0$ P2. $P(\Omega) = 1$ P3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = E(X^2) - \mu^2$; $\text{Cov}(X, Y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} = E(XY) - E(X)E(Y)$;

$$\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var}(X) + b^2 \text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$; $E(Y) = E_X[E(Y | X)]$;

Função geradora de momentos: $M_X(s) = E(e^{sX})$; $E(X^r) = M_X^{(r)}(0)$.

[Atenção: Cada resposta certa vale 2,5 cada resposta errada vale -2,5. A classificação desta questão variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10]

Indique as respostas verdadeiras (V) ou falsas (F), assinalando com X na quadrícula respectiva

1. Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ uma partição de Ω , com $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3$, e B e C dois acontecimentos de Ω :

	V	F
$P(C) < P(B) \Rightarrow C \subset B$.		
Os acontecimentos A_1 , A_2 e A_3 são independentes.		
$P(B \cap C) = P(B \cap C \overline{A_2}) \times P(\overline{A_2}) + P(B \cap C A_2) \times P(A_2)$.		
$P(A_1) + P(A_2) = P(\overline{A_3})$.		

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias (v.a.'s) com média, variância, respectivamente $\mu_X, \sigma_X^2, \mu_Y, \sigma_Y^2$ e funções distribuição $F_{X,Y}(x, y), F_X(x), F_Y(y)$, $F_{X,Y}(x, y)$ e respectivas f.d.p ou f.p. $f_{X,Y}(x, y), f_X(x), f_Y(y)$, e $a \in \mathfrak{R}$.

	V	F
Seja X v.a. contínua. $f(x)$ tem domínio em \mathfrak{R} e contradomínio em $[0;1]$.		
Suponha que $E(XY)$ não existe. Então $E(X)$ e $E(Y)$ também não existem.		
Seja $Z = (X - \mu_X) / \sigma_X$. Então $\text{Var}(Z) = 0$.		
Sejam a e b números reais. Se X é uma variável aleatória discreta então $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$, se e só se a e b forem pontos de descontinuidade de $F_X(x)$.		

Atenção: Das seguintes 2 questões **responda apenas a 1** (Resposta a 2 questões anula as 2) [Cotação: 15].

3. Comente a seguinte afirmação: “Uma variável aleatória cuja função distribuição tem pontos de descontinuidade é uma variável aleatória discreta”. **Fundamente** bem a sua argumentação. [Cotação: 15]

4. Seja A um acontecimento definido no espaço de resultados Ω . Utilizando os axiomas da medida de probabilidade demonstre que $P(A) \leq 1$. **[Cotação: 15]**



Nome: _____ Número: _____

Cotação da 2ª Parte: 6,5 Valores. (Espaço reservado para classificações)

1.a) (22,5) 2. (22,5) T:

1.b) (10) 3. (10) P:

1. Uma doença que afecta indivíduos em idade adulta, manifesta-se de forma grave em 5% dos casos, de forma moderada em 20% dos casos e não afecta os restantes. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 95% dos casos graves, em 80% dos moderados e em 5% dos que não são afectados pela doença.
- a) Mostre que mais de metade dos casos em que o teste dá positivo, o indivíduo está moderadamente afectado pela doença.

- b) De um grupo de 10 indivíduos em idade adulta escolhidos ao acaso com reposição, calcule a probabilidade de se obterem 2 casos afectados gravemente pela doença?
[Resposta errada desconta 1/4]

0.1460

0.0746

0.0881

0.2816

2. A quantidade de produto (em toneladas) vendida semanalmente por uma empresa é uma variável aleatória X com função densidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{8} & 0 < x < 4 \\ 0 & \text{outros } x \end{cases}$$

Calcule a probabilidade de a empresa vender mais de 3 toneladas numa semana em que já vendeu pelo menos 1 tonelada.

3. Numa análise imobiliária a uma certa região, definiu-se a variável aleatória bidimensional (X, Y) , onde X é o número de quartos e Y é o número de casas de banho, em cada habitação. A função de probabilidade conjunta é dada por:

$X \setminus Y$	1	2
1	0.50	0
2	0.25	0.05
3	0.05	0.15

Calcule o valor esperado do número de quartos para as habitações com apenas uma casa de banho? [Resposta errada desconta 1/4]

1.44

1.16

1

2.75