



INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Recurso – 25 de Junho de 2015

Duração: 2 horas

I

1. (2,5) Resolva o PVI
$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} - \left(\frac{t}{x}\right)^2 \\ x(1) = -1 \end{cases}.$$

2. Seja a equação diferencial de coeficientes variáveis

$$tx'' + \frac{1}{1 - \log t} x' - \frac{x}{t(1 - \log t)} = \frac{1 - \log t}{t^2}.$$

a) (1,5) Mostre que $x_1(t) = \log t$, $x_2(t) = t$ constituem um sistema fundamental de soluções da equação homogénea associada.

b) (2,5) Determine a solução particular da equação dada que satisfaz a condição $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$.

3. Considere a equação diferencial não linear $x'' + kx' - x(1 - x) = 0$, com $k \in \mathbb{R}$.

a) (1,5) Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada e determine as soluções de equilíbrio do sistema.

b) (2,0) Para que valores reais de k , $(0,0)$ é um equilíbrio instável?

c) (2,5) Faça $k = -2$. Resolva o PVI
$$\begin{cases} X' = AX \\ X(1) = (-1, 1) \end{cases}$$
 correspondente ao sistema linearizado, $A = Df(1,0)$.

II

No seguinte modelo económico, o PNB no ano t , Y_t , é definido como soma de 3 parcelas relativas a esse mesmo ano:

1. Gastos totais da população em bens de consumo, C_t
2. Total de investimentos em bens de capital, I_t
3. Total das despesas governamentais, G_t .

São feitas as seguintes hipóteses:

H1) o consumo é proporcional ao PNB relativo ao ano anterior,

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

H2) o investimento é proporcional ao aumento no consumo verificado entre o ano anterior e o corrente,

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}), \quad \beta > 0$$

H3) consideram-se constantes as despesas governamentais, $G_t = G_0$.

- a) **(1,5)** Mostre que Y_t obedece à equação com diferenças de 2ª ordem,
- $$Y_{t+2} - (\alpha + \alpha\beta)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = G_0.$$
- b) **(1,0)** Proponha uma solução particular do tipo constante para a equação não homogénea, $Y_t^p = A$, e mostre que esta depende dos valores de G_0 e α , obtendo-a explicitamente.
- c) **(2,0)** Justifique a seguinte afirmação, *a solução particular, anteriormente proposta, é do tipo constante sse nenhuma das raízes do polinómio característico for igual a 1.*

III

(3,0) Calcule o valor do integral $\int_{|z-1|=2} \frac{e^{z-1}}{z^2 - 5z + 4} dz$, justificando convenientemente.

fim