Análise Matemática IV – Soluções/Tópicos de Resolução ER 25/06/2015

I

1. Trata-se de uma equação não linear que pode ser resolvida pelo método das equações homogéneas, $x^3 = -t^3(1+3\log t)$.

2. Seja $t>0 \wedge t \neq e$.

   a) Ter-se-à que provar que ambas as funções $x_1(t)=\log t, \mathrm{x}_2(\mathrm{t})=\mathrm{t}$ são soluções da equação homogénea associada e que são linearmente independentes, e para isso calcula-se o Wronskiano cujo valor é $\log t - 1$, que por hipótese é diferente de 0.

   b) Sendo uma edo linear de 2ª ordem de coeficientes variáveis aplica-se o método da Variação das Constantes Arbitrárias.

   $$\begin{cases} C_1'\log t + C_2't = 0 \\ C_1'\dfrac{1}{t} + C_2' = \dfrac{1-\log t}{t^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(t) = -\dfrac{1}{t} + C_1 \\ C_2(t) = \dfrac{\log t}{2t^2} + \dfrac{1}{4t^2} + C_2 \end{cases},$$

   assim $x(t) = C_1\log t + C_2 t + \dfrac{1-2\log t}{4t}$, e a solução particular da equação que satisfaz a condição $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ é $x(t) = \dfrac{1-2\log t}{4t}$, correspondente a fazer-se $C_1 = C_2 = 0$ na solução geral.

3. **a)** $\begin{cases} x' = y \\ y' = x(1-x) - ky \end{cases}$ e as soluções de equilíbrio são $(0,0),(1,0),\ \forall k \in \Re$.

   b) O sistema linearizado no ponto $(0,0)$ corresponde à matriz $Df(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são $\lambda = \dfrac{-k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$. Para k positivo, negativo ou nulo é fácil de ver que existirão sempre 2 valores próprios de sinais contrários, o que traduz $(0,0)$ ser um ponto de sela, logo um equilíbrio instável $\forall k \in \Re$.

c) $A = Df(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ cujos valores próprios são *1* com multiplicidade 2. Assim, $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = A - S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ que é uma matriz nilpotente de ordem 2. Pelo TFSL, a solução do PVI é dada por $X(t) = e^{A(t-1)} X(1) = e^{t-1} \begin{bmatrix} 2t-3 \\ 2t-1 \end{bmatrix}$.

II

a) $Y_t = C_t + I_t + G_t$ e usando as 3 hipóteses obtem-se $Y_{t+2} - (\alpha + \alpha\beta) Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = G_0$.

b) Substituindo na equação não homogénea a proposta $Y_t^p = A$, obtem-se $A = \dfrac{G_0}{1-\alpha}$, o que mostra a solução particular depender dos valores de G_0 e α.

c) Pelo método do Polinómio Aniquilador, $Q(F)G_0 = 0 \Leftrightarrow Q(F) = F - 1$ cuja raiz é *1*. Se alguma das raízes do polinómio característico fosse *1* então a solução particular deixaria de ser constante pois ter-se-ia de multiplicá-la por alguma potência de *t*.

III

As singularidades da função são $z = 1, z = 4$, das quais apenas a primeira se encontra no interior da curva $|z-1| = 2$. Como a função $f(z) = \dfrac{e^{z-1}}{z-4}$ é analítica no interior e sobre a curva, aplique-se as Fórmulas Integrais de Cauchy

$$\int_{|z-1|=2} \frac{e^{z-1}}{z^2 - 5z + 4} dz = \int_{|z-1|=2} \frac{e^{z-1}/(z-4)}{z-1} dz = \frac{2\pi i}{0!} f(1) = -\frac{2}{3}\pi i .$$