

TÓPICOS DE RESOLUÇÃO
ANÁLISE MATEMÁTICA IV

Licenciatura MAEG

Época Normal – 4 de Junho de 2015

I

1. Resolva o PVI
$$\begin{cases} xe^{x^2} x' - \frac{t}{1+t^2} = 0 \\ x(1) = 2 \end{cases}.$$

EDO não linear de 1ª ordem de variáveis separáveis,

$$\int_2^x se^{s^2} ds = \int_1^t \frac{l}{1+l^2} dl \Leftrightarrow e^{x^2} = e^4 + \log\left(\frac{1+t^2}{2}\right).$$

2. Considere a seguinte equação diferencial de 3ª ordem

$$x''' + x'' - 2x' = 0.$$

a) Para que condições iniciais $x(0)$, $x'(0)$ e $x''(0)$, existe uma solução não nula, $x(t)$, limitada para $t \geq 0$.

EDO linear de 3ª ordem de coeficientes constantes homogénea,

$$P(D) = 0 \Leftrightarrow D = 0 \vee D = 1 \vee D = -2, \quad \text{a solução geral é}$$

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-2t} \quad \text{e para que esta função seja limitada para } t \geq 0$$

então $|x(t)| \leq |C_1| + |C_2|e^t + |C_3|e^{-2t} \leq K$ para $t \geq 0$, se $C_2 = 0$. Neste caso

as c.i. serão da forma $x(0) = a + b$, $x'(0) = -2b$ e $x''(0) = 4b$ com $a, b \in \Re$ e não simultaneamente nulos.

b) Obtenha o sistema de EDOs equivalente à equação dada, e mostre que

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t & e^{-2t} \\ 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{é uma matriz fundamental de soluções para o}$$

sistema obtido.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 2y - z \end{cases}, \text{ cuja matriz associada ao sistema é } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se provar que i. $\phi'(t) = A\phi = \begin{bmatrix} 0 & e^t & -2e^{-2t} \\ 0 & e^t & 4e^{-2t} \\ 0 & e^t & -8e^{-2t} \end{bmatrix}$, o que é verdade

e ii. $|\phi(t)| = 6e^{-t} \neq 0 \quad \forall t \in I = \mathfrak{R}$. Estas duas condições constituem uma c.n.s. para que ϕ seja uma matriz fundamental de soluções do sistema.

- c) Determine e^{At} , onde A é a matriz associada ao sistema, e calcule a solução do sistema que verifica a condição inicial $x(0) = 1$, $y(0) = 1$ e $z(0) = -1$.

Pelo Teorema Fundamental dos Sistemas Lineares, a solução do sistema é

dada por $X(t) = e^{At} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para o cálculo da matriz e^{At} utiliza-se a matriz

fundamental de soluções dada na alínea anterior pois $e^{At} = \phi(t)\phi^{-1}(0)$.

Assim, $\phi^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$ e a solução do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t}) \\ y(t) = \frac{1}{3}(e^t + 2e^{-2t}) \\ z(t) = \frac{1}{3}(e^t - 4e^{-2t}) \end{cases}.$$

3. Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x' = -y^2 + x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \\ y' = xy + y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) \end{cases} .$$

a) Mostre que $(\sqrt{k\pi}, 0)$ são soluções de equilíbrio do sistema, com $k \in \mathbb{Z}^+$.

Pretende-se mostrar $\begin{cases} f_1(\sqrt{k\pi}, 0) = 0 \\ f_2(\sqrt{k\pi}, 0) = 0 \end{cases}$, o que é verdadeiro pois

$$\operatorname{sen}(k\pi) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^+ .$$

b) Classifique os referidos pontos de equilíbrio quanto à estabilidade.

Sistema não linear, procedendo à linearização obtém-se

$$\begin{aligned} Df(\sqrt{k\pi}, 0) &= \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2x^2 \cos(x^2 + y^2) & -2y + 2xy \cos(x^2 + y^2) \\ y + 2xy \cos(x^2 + y^2) & x + \operatorname{sen}(x^2 + y^2) + 2y^2 \cos(x^2 + y^2) \end{bmatrix}_{(\sqrt{k\pi}, 0)} \\ &= \begin{bmatrix} 2k\pi \cos(k\pi) & 0 \\ 0 & \sqrt{k\pi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

cujos valores próprios são os elementos da diagonal. Assim, se k é par os valores próprios são positivos, $\lambda = 2k\pi \vee \lambda = \sqrt{k\pi}$, e os pontos de equilíbrio designam-se fontes e são instáveis; se k é ímpar os valores próprios são $\lambda = -2k\pi$ negativos, e $\lambda = \sqrt{k\pi}$ positivos, e os pontos de equilíbrio designam-se pontos de sela e são instáveis.

II

Considere o operador diferença Δ , definido por $\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$. Atenda à seguinte

Definição: Se $\Delta X_n = x_n$, define-se **operador antidiferença de** x_n , e representa-se por

$$\Delta^{-1}x_n, \quad \Delta^{-1}x_n = X_n + C, \quad \text{com } C \in \mathfrak{R} .$$

a) Mostre que $\Delta\Delta^{-1} = I$ e $\Delta^{-1}\Delta \neq I$.

De acordo com a definição,

$$\Delta\Delta^{-1}x_n = \Delta(X_n + C) = X_{n+1} + C - X_n - C = \Delta X_n = x_n \text{ o que prova } \Delta\Delta^{-1} = I .$$

$\Delta^{-1}\Delta X_n = \Delta^{-1}x_n = X_n + C \neq X_n \quad \forall C \neq 0$, o que prova $\Delta^{-1}\Delta \neq I$.

b) Calcule os operadores diferença e antidiferença da sucessão $u_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $a \neq 1$.

$$\Delta u_n = \Delta a^n = a^n(a-1)$$

$$\Delta^{-1}u_n = \Delta^{-1}a^n = \frac{a-1}{a-1}\Delta^{-1}a^n = \frac{a^n}{a-1}.$$

c) Com base na alínea anterior resolva o PVI $\begin{cases} \Delta x_n = (-2)^n \\ x(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$.

$$\Delta x_n = (-2)^n \Leftrightarrow \underset{\text{Def.}}{\Delta^{-1}(-2)^n} = x_n + C \underset{b)}{\Leftrightarrow} \frac{(-2)^n}{-2-1} = x_n + C \Leftrightarrow x_n = \frac{(-2)^n}{-3} + A$$

$$x(1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow A = 0.$$

Assim, a solução do PVI é $x_n = \frac{(-2)^n}{-3}$.

III

Seja a função complexa de variável complexa, $f(z) = \frac{1}{z^3 - 3z^2 + 7z - 5}$.

a) Determine e classifique as singularidades da função.

As singularidades são $z=1, z=1+2i, z=1-2i$. Todas são pólos simples,

$$\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)f(z) = \frac{1}{4},$$

$$\lim_{z \rightarrow 1+2i} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow 1+2i} (z-1-2i)f(z) = -\frac{1}{8},$$

$$\lim_{z \rightarrow 1-2i} f(z) = \infty \wedge \lim_{z \rightarrow 1-2i} (z-1+2i)f(z) = -\frac{1}{8}.$$

b) Calcule o valor do integral $\int_{|z|=2} f(z)dz$, mostrando que ambos os

teoremas, Fórmulas Integrais de Cauchy e Resíduos de Cauchy, são aplicáveis, justificando convenientemente.

$$\begin{aligned} z = 1 &\in \text{int } \gamma \\ z = 1 \pm 2i &\in \text{ext } \gamma, \end{aligned} \quad \text{onde } \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}.$$

Pelas Fórmulas Integrais de Cauchy,

$$\int_{|z|=2} f(z)dz = \int_{|z|=2} \frac{1/(z^2 - 2z + 5)}{z - 1} dz = 2\pi i h(1) = \frac{\pi i}{2} \quad \text{com } h(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5},$$

pois h é holomorfa no simplesmente conexo $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{5}\}$ e γ é uma curva de Jordan regular que contém no seu interior a singularidade $z = 1$.

$$\text{Pelo Teorema dos Resíduos, } \int_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(f, 1) = \frac{\pi i}{2}.$$

fim