Licenciatura MAEG, **Exame de Época Normal**, 15/06/2015
Processos Estocásticos e Aplicações, 3^o ano, 2^o semestre

No decurso do exame não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam vir a ser tidas em conta na correcção. 2h.
Formalize e fundamente sempre as suas respostas.

1. Considere duas urnas contendo cada uma 6 bolas. No início, a **Urna 1** contém 3 bolas brancas e 3 bolas pretas e a **Urna 2** contém 6 bolas pretas, apenas. Em cada passo/tiragem uma bola é retirada ao acaso de cada das urnas e as duas bolas são trocadas de urna. Seja X_n o número de bolas brancas na Urna 1 no período (passo) n, formando-se assim um processo aleatório em tempo discreto $\{X_0, X_1, X_2, ...\}$. (60)

   (a) Justifique que o processo é uma cadeia de Markov e é homogénea.
   (b) Calcule a matriz das probabilidades de transição. Justifique todos os procedimentos.
   (c) Calcule a distribuição estacionária da cadeia, caso exista. Justifique.
   (d) Serão *distribuição-limite* e *distribuição estacionária* a mesma coisa? Discuta adequadamente em termos genéricos e considere em particular o exemplo do exercício.

2. A entrada de clientes na *Cervejaria do Bairro* processa-se de acordo com um processo de Poisson, cuja contagem é representada por $\{N(t), t \geq 0\}$, à média de $\lambda = 5$ por hora. O estabelecimento tem também uma esplanada. A experiência permitiu estimar que 25% dos clientes que chegam dirigem-se para a esplanada do bar, onde são servidos. Admitamos que os clientes agem de forma independente uns dos outros.

   Seja $X(t)$ definido da seguinte forma:
   $$X(t) = \sum_{k=0}^{N(t)} Y_k\,, \quad \text{com } Y_0 \equiv 0,$$
   e em que Y_k, $\forall k \epsilon \mathbb{N}$, é uma variável aleatória que representa o atributo "escolha da esplanada". $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.i.d. e é independente de $\{N(t)\}$. (60)

   (a) Explique o que representa $\{X(t)\}$ e identifique o tipo de processo.
   (b) Calcule a função geradora de probabilidades de $X(t)$.
   (c) Mostre que a v.a. $X(t)$ segue uma distribuição de Poisson com média $1,25t$.
   (d) Calcule a probabilidade de que três clientes tenham escolhido a esplanada na segunda meia hora, desde a abertura.
   (e) Entraram cinco clientes no estabelecimento durante a primeira meia hora. Calcule a probabilidade de que três deles não se tenham dirigido à esplanada nesse período.

3. Considere um movimento Browniano standard $\{B(t), t \geq 0\}$ e os instantes $0 < u < u + v$, com $u, v, w > 0$. (50)

   (a) Calcule $\mathrm{E}\left[B(u)B(u+v)\right]$.
   (b) Encontre a distribuição de $B(u) + B(u+v)$.
   (c) Seja $X(t) = -0.1t + 2B(t)$. Calcule a probabilidade de que o processo é superior a 9 no instante $t = 4$, sabendo-se que começa em 2.82.

4. Considere o processo $\{X_n\}$, com $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, $X_0 = 0$, e em que as v.a.'s Y_i, $i = 1, 2, ...$, seguem a seguinte função de probabilidade
   $$f_{Y_i}(x) = \begin{cases} p, & x = 1; \\ 1-p, & x = -1 \end{cases}, \text{ com } 0 < p < 1.$$
   Assuma que as variáveis aleatórias Y_i, $i = 1, 2, ...$, são independentes.

   Em que condições $\{X_n\}$ é uma Martingala? Explique muito bem cada passo/procedimento. (30)