Licenciatura MAEG, **Exame de Época de Recurso**, 30/06/2015
Processos Estocásticos e Aplicações, 3^o ano, 2^o semestre

No decurso do exame não serão prestados quaisquer esclarecimentos. Se tiver dúvidas, apresente-as por escrito no seu teste, para que as mesmas possam vir a ser tidas em conta na correcção. `2h`.
Formalize e fundamente sempre as suas respostas.

1. Segundo um recente estudo de mercado os consumidores da área urbana da Cidade XIS revelaram que as suas preferências de marca de certo tipo de detergente de grande consumo dependem das escolhas feitas no período anterior. As marcas são identificadas como A, B, C e D. O estudo concluiu que as escolhas entre marcas de período para período podem ser modeladas por uma cadeia de Markov cujas probabilidades de transição num passo são representadas na seguinte matriz:

$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

(60)

   (a) Classifique os estados e calcule o período do estado D. Justifique.
   (b) Existe distribuição limite. Porquê? Calcule a distribuição estacionária.
   (c) Qual a percentagem de consumidores que no longo prazo não têm preferência nem pela marca A nem pela B.
   (d) Suponha que no período k um consumidor escolheu a marca A.
      i. Calcule a probabilidade de escolher D em $k+2$.
      ii. Qual a probabilidade de não mudar de marca nos três períodos seguintes.
      iii. Em média, de quanto em quanto tempo voltará a escolher a marca A.

2. Um empregado de bar trabalha ao balcão em turnos de três horas por dia. Os clientes chegam ao balcão segundo um processo de Poisson e o tempo de atendimento tem distribuição exponencial. O pequeno bar tem uma esplanada e tem habitualmente um funcionário ao balcão. Em média chega ao balcão um cliente em cada seis minutos e o tempo médio de atendimento é de quatro minutos por cliente. Seja $N(t)$ o número de clientes que chegam em $(0,t]$, em minutos. (65)

   (a) Sabe-se que num dos turnos de atendimento chegaram 35 clientes ao balcão para atendimento. Qual a probabilidade de que 15 deles terem chegado na primeira hora de trabalho?
   (b) Calcule a probabilidade de não chegar nenhum cliente durante os primeiros 10 minutos do turno.
   (c) Calcule a probabilidade do primeiro cliente chegar depois de três minutos mas antes de cinco.
   (d) No fim da primeira hora de um turno já tinham chegado 14 clientes ao balcão. Quantos clientes se espera que cheguem ao balcão nesse turno?
   (e) Qual a probabilidade de um cliente ter de ficar à espera antes de ser atendido?
   (f) Em situação de funcionamento em estabilidade, numa semana em que o empregado trabalhe seis turnos, calcule o tempo que espera passar desocupado.
   (g) Calcule $\mathrm{E}\left[N(t)N(t+s)\right]$.

3. Considere o problema do exercício anterior. Nos dias em que há jogos da liga de futebol, os clientes chegam ao balcão segundo um processo de Poisson à média de 20 por hora e há necessidade de contratar um funcionário adicional. Suponha que os clientes são atendidos por hora de chegada, e não há razão para se supor que os tempos de atendimentos de cada funcionário seja diferente. Caso seja necessário, os clientes naturalmente formam fila ordenada para atendimento. (50)

   (a) Descreva sumariamente os pressupostos do sistema de espera.
   (b) Calcule o número médio de clientes na fila num determinado instante de tempo e o número médio de clientes que estão a ser atendidos.
   (c) Um cliente levanta-se da mesa para ir ao balcão buscar mais uma bebida. Em média depois de quanto tempo voltará para a mesa?
   (d) Determine a probabilidade de um cliente ter de esperar mais de dois minutos na fila até começar a ser atendido.

4. Considere um processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$, com intensidade λ e seja W_k o instante de ocorrência do k-ésimo acontecimento, $k = 1, 2, \ldots$ Mostre que o processo $\{X_n = \lambda^n \prod_{i=1}^{n} (W_{i+1} - W_i), n = 1, 2, \ldots\}$, com $N_0 = 0$, é uma martingala em tempo discreto. Explique muito bem cada passo/procedimento. (25)